LES BOMBOLLES DE SABÓ DESCOBREIXEN LA GEOMETRIA

Yo amo los mundos sutiles,
ingrávidos y gentiles como
pompas de jabón.

Antonio Machado

Document extret d'una ponència realitzada a la Universidad Internacional Menéndez Pelayo
Santander, 11 de setembre del 2000
pel professor:

Anton Aubanell Pou
IES "Sa Palomera", Blanes (Girona)
Facultat de Matemàtiques, Universitat de Barcelona.

Dossier adreçat a primària i a secundària

QUI NO HA JUGAT MAI AMB BOMBOLLES DE SABÓ?

Darrera d'aquestes innocents i divertides figures s'amaga un gran entramat matemàtic que es pot aprofitar per treballar conceptes de geometria en els diferents nivells educatius.
Hi ha una part recreativa i lúdica, motivadora pels alumnes i al mateix temps la constatació de les possibilitats que ofereix la matemàtica per explicar, descriure i predir els fenòmens naturals, en aquest cas el comportament dels líquids.

Fer geometria amb bombolles de sabó té un encant: l'encant de l'incertesa. És una geometria aventurera, una mica entremaliada, bònica però, efímera, com la majoria de les coses belles: el vol d'una papallona, una flor, una posta de sol,... una bombolla de sabó!

MATERIAL

- Un recipient amb la **barreja** formada per **aigua** (50%), **sabó líquid** de rentaplats, tipus fairy (40%) i **glicerina** (10%). Potser, caldrà ajustar les proporcions fent un tempteig depenent de la duresa de l'aigua i del tipus de sabó que s'utilitzi.

- **Jocs de làmines planes transparents** unides per unes petites columnes de plàstic.

- **Carcasses de ferro de figures polièdriques amb volum:** prisma recte de base triangular, cub, tetraedre i octaedre amb mànecs per subjectar.

- **Aros, triangles i quadrats** amb mànec per subjectar.

- Un paquet de **canyes.**

- **Trossos de fil, filferro, un paquet de cigarrets i una capsa de llumins.**

FONAMENT FÍSIC

A causa de la **tensió superficial** els líquids presenten una tendència a reduir la superfície exterior que mostren ja que la mínima superfície correspon al menor valor possible de l'energia potencial deguda a la tensió superficial.
D'aquesta manera, si un volum de líquid es deixa lliure a l'aire o en el si d'un altre líquid de la mateixa densitat, es situarà de manera que tingui la **menor superfície** possible compatible amb el seu volum.
Les gotes del líquid són esfèriques, perquè, per un volum donat, **l'esfera és la figura que presenta la menor superfície exterior.**

El sabó té l'efecte de disminuir la tensió superficial dels líquids i de permetre la seva laminació formant bombolles que mantenen, no obstant, la tendència a situar-se en superfícies mínimes. Per tant, s'aprofitarà aquesta propietat per produir figures tridimensionals formades per la combinació de pel.lícules sabonoses.
A la pràctica, amb freqüència s'obtindran mínims relatius, superfícies minimals. Si els movem o canviem de posició podrem passar d'una configuració minimal a una altra o accedir a mínims absoluts estables.

EXPERIMENTEM

S'ha de tenir en compte que:

- **Cal submergir totalment les figures dins el liquid i tot seguit, treure-les amb cura.**
- **Cal mullar-nos els dits o les canyes amb el líquid abans de tocar les figures, ja que sinó trencarem les pel.lícules de sabó.**
- **La barreja és molt concentrada (sabó i glicerina). Cal rentar-se i esclarir-se bé les mans després de fer la pràctica i sobretot no posar-s'ho a la boca.**

PRIMERA PRÀCTICA : GEOMETRIA PLANA

Material

- Jocs de làmines planes transparents unides per unes petites columnes de plàstic
- Projector de transparències
- Regla i compàs, corda i anelles
- Canyes

Primer cal anar submergint les diferents plaques en el líquid fent abans hipòtesis sobre que passarà i comprovant després. És a dir, respondre a la pregunta:

"Quines figures s'obtenen entre plaques planes projectables en dues dimensions?"

Aquesta experiència permet resoldre , de manera pràctica, l'anomenat **problema de Steiner** (de principis del segle XIX) que, en la seva versió més general diu:

"Donats n punts $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ del pla, determinar un sistema connex de segments rectilinis de longitud total mínima, de manera que dos punts qualsevols quedin units per una poligonal formada per segments del sistema.

Per 3 punts (n=3)

Material:

o Jocs de làmines planes transparents unides per **tres** petites columnes

Es submergeix l'estructura amb les tres columnes situades en els vèrtexs d'un imaginari triangle amb els angles menors de 120°.

Quan la traiem observarem que s'han format tres superfícies planes i rectangulars que surten de cadascuna de les tres columnes i convergeixen en una aresta interior.
Si projectem la figura obtinguda, mitjançant el projector de transparències, observarem que la imatge formada per tres segments que uneixen cada vèrtex amb un punt central, determinen angles de 120°. És el ***punt de Fermat*** que compleix la propietat que la suma de les seves distàncies als tres vèrtexs donats és mínima.

Si algun dels àngles del triangle inicial fos més gran de 120° el punt de Fermat coincidiria amb el vèrtex corresponent.

Hi ha d'altres maneres de construir el punt de Fermat d'un triangle i és interesant mostrar experimentalment la seva coincidència:

Amb regla i compàs:

Primer, sobre cada costat del triangle original, es construeix un triangle equilàter cap a l'exterior. A partir d'aquí el punt de Fermat es pot determinar per dos procediments: Es tracen les respectives circunferències circunscrites a cadascun dels triangles exteriors. Les tres circunferències s'interceptaran en el punt de Fermat. Es tracen les rectes que uneixen respectivament cada vèrtex del triangle interior amb el seu vèrtex oposat del triangle exterior corresponent. Les tres rectes es creuen en el punt de Fermat.

Amb cordes:

Es demana la col.laboració de quatre alumnes i se'ls dóna una anella de plàstic a cadascun. Tres es situaran en els vèrtexs del triangle i el quart al centre.
Es lliga la corda a una de les anelles dels vèrtexs i s'anirà passant pels altres vèrtexs de manera que per anar de vèrtex a vèrtex es passarà per l'anella central. Al final la corda ha de sortir per la mateixa anella on s'ha lligat al principi.
Després un cinquè alumne col.labora tibant la corda per un extrem. Naturalment, els vèrtexs es mantindran fixes, però, l'anella central es podrà anar movent, amb la finalitat que es pugui anar traient la màxima quantitat de corda del sistema. Arriba un moment en que ni la persona que tiba la corda ni

la que mou l'anella central poden moure's. S'obté una configuració on la quantitat interior de corda és mínima. L'anella central s'haurà col.locat sobre el punt de **Fermat** de l'imaginari triangle.

Amb el programa Cabri-Géomètre, numèricament,...

Per 4 punts (n=4)

Material:

- Joc de làmines planes transparents unides per **quatre** petites columnes.

És la formulació més típica del problema de Steiner i es pot plantejar com la determinació de la red mínima de carreteres que uneix quatre ciutats.
Al submergir l'estructura s'obté una figura formada per cinc pel.lícules planes , una de les quals queda en el centre sostinguda per les altres quatre que s'uneixen als vèrtexs. Els angles lliures continuen sent de 120°.
Com en el cas anterior, es pot realitzar l'experiment mitjançant una corda que passa pels vèrtexs d'un rectangle i per dues anelles intermitges.

Per 5 i 6 punts (n=5, n=6)

Material:

- Joc de làmines planes transparents unides per **cinc i sis** petites columnes.

Amb aquestes estructures (pentagonals i hexagonals) s'observa també la formació d'angles de 120°.

SEGONA PRÀCTICA

FIGURES OBTINGUDES SOBRE ESTRUCTURES POLIÈDRIQUES (AMB VOLUM)

Al submergir en el líquid les estructures polièdriques s'obtenen interessants i boniques figures amb volum:

Tetraedre

Al submergir una estructura tetraèdrica s'obtenen 6 làmines planes i triangulars que es tallen en 4 arestes que convergeixen en el baricentre, ja que és una figura regular.
Els angles entre les cares que es formen són de 120º i els angles entre les arestes que convergeixen al baricentre són de 109º 28'.

A/ Es pot provar de tallar algunes làmines (amb la punta del dit o amb la canyeta) i s'obtindrà un paraboloide hiperbòlic (el perfil de la sella de muntar).

B/ Amb l'ajuda d'una canyeta, es pot col.locar al centre una bombolla simplement d'aire o bé de fum. Amb el fum queda més visible, es forma una bella figura tetraèdrica, amb les cares abultades, aguantada entre les 6 làmines planes.

Cub

Al submergir aquesta figura apareix una làmina quadrada en el centre suspesa per 12 làmines planes en forma de trapeci. Els angles entre cares són sempre de 120º.

A/ Si es mou l'estructura en cada una de les tres direccions donades per les arestes del cub es pot aconseguir que el pla central es col.loqui ortogonalment a la direcció del moviment provocant curiosos salts entre tres configuracions minimals equivalents.

B/ Si bufem amb una canyeta en el pla central obtindrem un cub - amb les cares lleugerament abultades- aguantat entre les 12 làmines líquides.

C/ I si fem servir fum de tabac es visualitzarà millor el cub central i tindrà un encant especial.

D/ Amb les figures obtingudes anteriorment es poden destruir algunes de les cares que uneixen el pla central amb les arestes amb la finalitat d'obtenir una bonica superfície abultada inscrita en un contorn poligonal tancat format per una successió d'arestes del cub.

Prisma recte de base triangular

Al submergir aquesta figura apareix una configuració formada per 9 làmines: 3 cares triangulars que surten de les arestes d'una base i que convergeixen en un punt central, unes altres 3 cares que reprodueixen la mateixa imatge en l'altre base, una aresta que uneix els dos punts de convergència citats i 3 cares trapezoïdals que uneixen aquesta aresta central amb les arestes de l'estructura metàl.lica.
És una vistosa configuració minimal.

A/ Es pot bufar amb una canyeta i es poden aconseguir petites i efímeres escultures, com un rellotge de sorra.

Octaedre

Al submergir la figura es poden obtenir diferents formes segons la qualitat del líquid i del moviment d'extracció.
Per passar d'una figura a una altra, caldrà bufar o sacsejar la carcassa. Totes les figures que apareixen són molt boniques , però, resulta especialment fascinant una rosa dels vents tridimensional d'extraordinària bellesa.

TERCERA PRÀCTICA

OBTENCIÓ DE FIGURES SOBRE D'ALTRES ESTRUCTURES

3.1.--Amb els aros metàl.lics es poden formar grans bombolles que , en elles mateixes, ja resulten molt atractives però, que, a més a més, ens permeten visualitzar interessants configuracions, des de dues esferes secants fins a una catenoide.

A/ S'agafa una bombolla entre dos aros i es va separant lentament. S'observa com es va perdent la forma esfèrica del contorn per anar-se aproximant a un cilindre.

B/ Si es continua separant els aros veurem com la superfície lateral comença a escanyar-se formant una **catenoide** -interessant superfície **minimal** obtinguda per la revolució de la curva catenària al voltant d'una recta perpendicular al seu eix de simetria.
Si es van separant els aros s'arriba a una distància crítica, la catenoide s'inestabilitza i es trenca i es formen dos discos situats sobre els aros.

3.2.- Al submergir un filferro en forma de doble hèlix és genera una **helicoide**. Ens recorda l'estructura de la mol·lècula d'ADN o bé les escales de cargol, amb la particularitat d'estar formades per dues rampes, de manera que una persona pot pujar i una altra baixa sense necessitat de creuar-se.

3.3.- Al submergir un aro ens queda una pel.lícula fina de sabó. Podem intentar posar una anella feta amb fil al damunt de la pel.lícula. Primer, el fil queda arrugat, però, si trenquem , amb molta cura, la pel.lícula situada al mig de l'anella del fil, la làmina líquida exterior tendirà a reduir la seva superfície i tensarà el fil en totes direccions formant un cercle buit perfecte que perfora la làmina de sabó. És una curiosa visualització de l'efecte de tensió superficial dels líquids.

3.4.- Al submergir altres figures realitzades amb filferro s'obtenen formes tan maques com sorprenents. Resulta especialment atractiu observar l'efecte que produeix sobre les làmines líquides al deformar els contorns del filferro.

Es tracta d'un camp obert a la imaginació i a la creativitat on convergeixen, de manera fascinant, la matemàtica i l'estètica.

ASPECTES DIDÀCTICS

Les activitats es poden realitzar a diferents nivells - des del parvulari a la universitat- , als nens i a les nenes de parvulari els agradaran les bombolles i les formes que s'obtenen, els alumnes de la universitat s'interessaran per les propietats de les superfícies minimals.
A cada nivell es poden tractar aspectes específics: el vocabulari geomètric que apareix de manera natural al descriure les formes, els angles, les distàncies, les superfícies, les posicions relatives entre els elements geomètrics, les simetries, les representacions gràfiques,... i, en general, el poder modelitzador de la matemàtica.

Les activitats treballen diferents àrees: física i química (tensió superficial, la mescla del líquid), tecnologia (disseny i construcció de les estructures), educació visual i plàstica (estètica i representació de les formes obtingudes).etc.

Les activitats tenen un contingut lúdic, però, cal evitar, que l'alumne ho entengui com un espectacle, sense, més contingut.

Les activitats s'han de realitzar en sessions de duració limitada, ja que , passat un temps, l'activitat "explotarà" i caldrà deixar un marge de joc lliure.

En nivells més alts, pot ser interessant, que després de les activitats, l'alumne respongui un qüestionari o elabori un petit informe sobre les observacions realitzades. Aquest exercici de reflexió i expressió pot millorar l'aprofitament educatiu de les activitats proposades.

Les experiències pràctiques manipulant materials concrets no són elements secundaris a la classe de matemàtiques. No es tracta de frivolitats, curiositats, activitats més o menys vistoses, però, insignificants ... Són elements que permeten acostar-nos de manera natural, en molts casos, a les autèntiques motivacions que van originar els problemes matemàtics.

PRÀCTICA : GEOMETRIA AMB BOMBOLLES DE SABÓ, I

Nom: .... Curs: ....

Segur, que quan eres petit/a, t'agradava fer bombolles de sabó!. Avui hi jugarem i observarem les figures geomètriques que s'hi formen.

Material necessari:

Un recipient amb la barreja sabonosa
Una carcassa tetraèdrica
Una canyeta

El teu professor/a submergirà una carcassa en forma de piràmide de cares triangulars (tetraedre) dins d'un líquid sabonós. Al treure'l, apareixerà una figura formada per finíssimes làmines d'un líquid sabonòs. Bonic, no? T'atreveixes a fer-ho tu?

Ho pots repetir tantes vegades com vulguis. Observa bé el resultat.

Després pots trencar algunes cares i descobrir com es reorganitza la figura.

També pots posar alguna bombolla al mig bufant amb una palleta. Obtindràs formes molt boniques!

1.- Escriu un breu text i descriu la figura que apareix al submergir una carcassa tetraèdrica en el líquid sabonós.

2.- Quina figura es forma quan es tallen dues cares? Dibuixa-la.

3.- Quina figura es forma quan es tallen tres cares? Dibuixa-la.

4.- Completa la frase següent:

Apareixen .... cares planes en forma de .... Aquestes cares es tallen formant .... En total apareixen .... rectes que es tallen en un .... central anomenat baricentre.

5.- Dibuixa, tan exactament com et sigui possible, la figura completa que apareix a l'extreure la carcassa del líquid.

6.- Amb l'ajuda de la canyeta col.loca una bombolla en el centre de la figura i bufa suaument per inflar-la. Quina figura apareix?

7.- Si continues inflant la figura central , arribarà a coincidir amb la carcassa exterior. Quantes cares, arestes i vèrtexs té?

8.- Anomena tres mots geomètrics que hagin aparegut al fer aquesta pràctica i fes una breu explicació del seu significat. Després, entre tota la classe, es podrà fer una llista en comú.

PRÀCTICA : GEOMETRIA AMB BOMBOLLES DE SABÓ, II

Nom: .... Curs: ....

Et va agradar la pràctica de la classe anterior?
Avui farem una activitat semblant, però, jugant amb una carcassa en forma de cub i una altra en forma d'octaedre.

Material necessari:

Un recipient amb la barreja sabonosa
Una carcassa cúbica i una altra octaèdrica
Una canyeta

El teu professor/a submergirà una carcassa en forma de cub dins del líquid sabonós. Al treure'l apareixerà una figura formada per finíssimes làmines de líquid. Es tracta d'una figura diferent de la que s'havia obtingut amb el tetraedre. Després es farà el mateix amb una carcassa octaèdrica.

Ara et toca fer-ho a tu.

Ho pots repetir tantes vegades com vulguis. Observa bé el resultat.

Després pots trencar algunes cares i descobrir com es reorganitza la figura.

També pots posar alguna bombolla al mig bufant amb una palleta.

1.- Escriu un breu text i descriu la figura que apareix al submergir una carcassa cúbica en el líquid sabonós.

2.- Dibuixa, tan exactament com et sigui possible, la figura que apareix a l'extreure la carcassa del líquid.

3.- Completa la frase següent:

Apareixen .... cares planes, una d'elles en forma de .... i les restants en forma de .... Aquestes cares es tallen formant .... arestes.

4.- Amb l'ajuda d'una canyeta col.loca una bombolla en el centre de la figura i bufa suaument per inflar-la. Quina figura apareix? Quantes cares, arestes i vèrtexs té la figura central?

5.- Submergeix l'octaedre en el líquid sabonós. Al treure'l, observaràs unes boniques figures que poden variar segons la posició amb que extreus la carcassa del líquid. Després dibuixa una d'aquestes figures.

6.- Descriu en un breu text la figura dibuixada en l'apartat anterior.

7.- Fes diverses proves submergint i extreient l'octaedre. Probablement, en alguna extracció, obtindràs una forma molt vistosa. Pots reconèixer-la?

8.- Anomena tres mots geomètrics que hagin aparegut al fer aquesta pràctica i fes una breu explicació del seu significat. Després, entre tota la classe, es podrà fer una llista en comú.