ORIENTACIONS PRÀCTIQUES PER A LA MILLORA DE LA GEOMETRIA

Anton Aubanell i Pou. Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat

INTRODUCCIÓ

A vegades s'afirma que la matemàtica és la ciència de la quantitat i de l'espai. Així la geometria, com a estudi de l'espai, és una part fonamental de la matemàtica. Aquesta presència de la geometria en el cor de la matemàtica des de temps remots es posa de manifest quan Josep Pla afirma que «per als matemàtics grecs resoldre un problema era equivalent a fer una construcció geomètrica» (Pla i Carrera, 2006) o quan Galileu escriu: «La filosofia està escrita en aquest gran llibre contínuament obert davant dels nostres ulls (em refereixo a l'Univers); però no el podem entendre si abans no aprenem a comprendre la llengua en què està escrit. Està escrit en llenguatge matemàtic i els seus signes són els triangles, cercles i altres figures geomètriques, sense els quals és humanament impossible entendre res; sense ells és com endinsar-se vanament en un laberint ben fosc» (Galileu, G., *Il Saggiatore*, Roma, 1623).

Vivim immergits en l'espai i el seu coneixement és fonamental en la formació dels alumnes. Les formes planes i els cossos tridimensionals estan sempre presents al nostre entorn, se'n fan seccions, projeccions i desenvolupaments, es mesuren longituds, àrees i volums, es construeixen models a escala (plànols, mapes, maquetes, etc.), cal descriure formes, ubicar posicions, orientar-se... Mai no havia estat tan fonamental com ara el coneixement de l'espai. Alhora els raonaments lògics en l'àmbit de la geometria, les demostracions de propietats en figures planes i en cossos a l'espai i la resolució de problemes geomètrics formen part de les més genuïnes, potents i elegants activitats matemàtiques, presenten la matemàtica com a ciència deductiva i són fonamentals en la formació del pensament matemàtic. Philip J. Davis i Reuben Hersh, en el seu llibre *Experiencia Matemática* (Davis, 1988), posen de manifest els dos aspectes que s'acaben de citar: «Des dels grecs, la geometria ha tingut sempre un doble aspecte. S'afirma que és una descripció precisa i rigorosa de l'espai en què vivim; també, que és una disciplina intel·lectual, una estructura deductiva».

L'estudi de la geometria (que comprèn els blocs curriculars d'espai i forma i de mesura) és una oportunitat excel·lent per educar la percepció espacial, per establir enllaços amb altres disciplines i amb contextos quotidians, per posar en joc raonaments visuals i per estimular la creativitat i la imaginació. Maria Antònia Canals posa de manifest aquest formidable potencial educatiu de la geometria quan, apuntant set característiques que hauria de tenir l'ensenyament de la matemàtica del futur, assenyala: «Una matemàtica que potenciï el coneixement de l'espai, és a dir, la geometria. Aquest aspecte tradicionalment ha estat oblidat, però ara cada dia veiem més la relació que té amb el coneixement del propi context i la seva importància en la formació global de la persona» (Canals, 2010). Si bé ella es refereix a l'educació primària, el desig que expressa és perfectament aplicable a la secundària.

> La geometria té un paper clau en la formació de l'alumnat des d'una perspectiva competencial

La seva presència en tot el que ens envolta, la seva possibilitat d'aplicació en contextos quotidians i la seva aportació a la formació d'una base matemàtica sòlida fan que la geometria sigui un àmbit privilegiat per resoldre problemes que impliquin visualització i comprensió espacial, per treballar habilitats específiques de raonament i de prova, per desenvolupar la capacitat de comunicació i, especialment, de representació gràfica i per establir connexions entre parts de la matemàtica, amb altres matèries i amb l'entorn quotidià. En definitiva es tracta d'un territori idoni per conrear les quatre dimensions que articulen les competències matemàtiques (Departament d'Ensenyament, 2013). No és estrany que pràcticament una tercera part dels continguts clau que s'identifiquen en l'àrea de matemàtiques per a l'ESO corresponguin a l'àmbit de la geometria (sentit espacial i representació de figures tridimensionals; figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció; relacions i transformacions geomètriques; magnituds i mesura; i relacions mètriques i càlcul de mesures en figures). Així doncs, la geometria té un paper clau en la formació de l'alumnat des d'una perspectiva competencial.

En contrast amb la importància que s'acaba d'assenyalar del coneixement geomètric, els resultats que s'obtenen en aquest bloc en les proves d'avaluació de quart d'educació secundària obligatòria i en les proves PISA estan molt lluny de ser satisfactoris i tenen un ampli marge de millora . El número 28 de la sèrie *Quaderns d'avaluació* inclou l'article «Orientacions per a la millora de la geometria a l'ESO», que conté una anàlisi dels resultats de les proves d'avaluació de l'educació secundària obligatòria realitzades els anys 2013 i 2014 i dels resultats de les proves PISA dels anys 2012 i 2003, que van avaluar prioritàriament les matemàtiques. En tots aquests estudis (de manera més intensa en les avaluacions de l'educació secundària obligatòria i de manera menys intensa però significativa en les proves PISA), s'observa que hi ha una dificultat notable i persistent en el camp de la geometria. En el mateix article s'apunten possibles causes d'aquestes dificultats i s'avança una proposta de línies de millora que es desenvolupa i es concreta en aquest document. A part d'assenyalar la necessitat d'equilibrar la implementació del currículum augmentant la presència de la geometria i moderant la del càlcul, es fan dues propostes de caràcter més metodològic. Per una banda, es proposa incorporar al treball geomètric més activitats competencialment riques, proposant processos d'experimentació i descoberta com a base per a la construcció de coneixement, emprant més material manipulable i programes de geometria dinàmica com el GeoGebra i donant més presència als contextos en la classe de geometria. Per altra banda, es planteja la conveniència de posar en joc més idees geomètriques i raonament visual en els blocs de continguts no estrictament geomètrics, per estendre així les fronteres de la geometria més enllà dels seus dominis tradicionals i posar la seva potència al servei dels altres blocs del currículum de matemàtiques: numeració i càlcul, canvi i relacions, i estadística i atzar.

La primera part d'aquest document està dedicada a analitzar les dificultats esmentades i, especialment, a aprofundir en les propostes de millora. La segona part presenta comentaris i activitats d'aula que concreten les línies de millora assenyalades en la primera part i que responen a un enfocament més reflexiu, constructiu, experimental i contextualitzat del treball geomètric. Així, per a cadascun dels cinc blocs del currículum, hi ha unes observacions generals que aporten idees metodològiques, reflexions didàctiques i referències que poden ser útils; una activitat descrita i analitzada amb detall, i un quadre amb altres activitats comentades breument. Com a complement d'aquestes orientacions s'ha creat un espai a la pàgina web de la XTEC on aquestes últimes activitats es desenvolupen amb més detall.

La segona part d'aquest article conté diversos comentaris i activitats d'aula

Aquestes activitats es classifiquen seguint els cinc blocs de continguts que estableix el currículum. Per als blocs geomètrics (mesura; espai i forma) es tracta d'activitats d'experimentació, amb materials i contextos. Per als altres blocs, es tracta d'activitats *geometritzadores*, que tot treballant continguts propis dels respectius blocs posen en joc idees i destreses geomètriques. Al final d'aquestes *orientacions pràctiques* s'inclouen cinc quadres (un per a cada bloc de continguts) que relacionen totes les propostes d'activitat presentades amb les competències i els continguts clau que s'estableixen en el document *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria* del Departament d'Ensenyament.

Actualment gran part del professorat està fent un esforç per accentuar i repensar el treball de la geometria en l'educació matemàtica. El propòsit de les presents *orientacions pràctiques* és contribuir a aquest esforç que ha de fer possible la millora del coneixement i les habilitats geomètriques dels alumnes i, en definitiva, l'enfortiment de la seva competència matemàtica.

ANÀLISI DE LES DIFICULTATS DE L'ENSENYAMENT DE LA GEOMETRIA A L'EDUCACIÓ SECUNDÀRIA OBLIGATÒRIA I PROPOSTES DE MILLORA

IDENTIFICACIÓ D'UNA DIFICULTAT I ANÀLISI DE LES POSSIBLES CAUSES

Els resultats de les darreres proves d'avaluació de competència matemàtica mostren especials dificultats en el camp de la geometria coincidint, de manera significativa, amb el que s'observa en els resultats d'anys anteriors. En el cas de les proves d'avaluació de l'educació secundària obligatòria els blocs de continguts avaluats són: numeració i càlcul; espai, forma i mesura; canvi i relacions; estadística. En l'avaluació de l'any 2015 el bloc corresponent a geometria (espai, forma i mesura) obté una mitjana de més de 16 punts per sota de la mitjana global i, amb molta diferència, presenta el percentatge més gran d'alumnat en un nivell d'assoliment baix (41,3%, més de 25 punts per sobre del percentatge d'alumnat en la mateixa franja en els resultats globals de la matèria) i el percentatge més baix d'alumnat en un nivell d'assoliment alt (14,5%, més de 14 punts per sota del percentatge d'alumnat en la mateixa franja en els resultats globals de la matèria). Aquests resultats confirmen els ja observats en les proves d'avaluació corresponents als anys 2014 i 2013. En l'avaluació de l'any 2014 el bloc corresponent a geometria (espai, forma i mesura) obtenia una mitjana de quasi 10 punts per sota dels altres blocs i, amb molta diferència, tenia el percentatge més gran d'alumnat en un nivell d'assoliment baix i mitjà-baix. En l'avaluació de l'any 2013 la mitjana del bloc de geometria estava a més de 7 punts per sota de la mitjana global, el percentatge d'alumnat amb un nivell d'assoliment baix estava 11 punts per sobre del global de la matèria. Aquesta tendència també ha deixat rastre en les proves PISA encara que de manera més moderada. En aquest cas, s'avaluen quatre categories: quantitat, espai i forma, canvi i relacions i incertesa. Tant en els resultats de les proves PISA 2012 com en els de les proves PISA 2003 (dos ocasions en què es va avaluar prioritàriament la competència matemàtica) la categoria d'espai i forma continua presentant les pitjors puntuacions.

> Els baixos resultats en geometria es donen a les avaluacions de quart d'ESO i a PISA

La persistència d'aquests resultats deixa poc marge de dubte sobre on tenim un dels problemes més importants en l'ensenyament de les matemàtiques a l'educació secundària. En les proves d'avaluació, les puntuacions obtingudes en geometria castiguen molt la mitjana global, de manera que una millora en aquest camp no tan sols situaria la geometria al nivell dels altres blocs de continguts, sinó que portaria el resultat conjunt a una posició més acceptable que, en definitiva, seria un bon indicador de millora de la competència matemàtica del nostre alumnat.

El número 28 dels *Quaderns d'avaluació*, dedicat a *L'avaluació de quart d'ESO 2014* conté l'article «Orientacions per a la millora de la geometria a l'ESO», que amplia les dades estadístiques exposades, inclou una anàlisi de possibles causes d'aquestes dificultats i avança una proposta de línies de millora que es desenvolupa i es concreta ara. Algunes de les possibles causes que s'assenyalen en l'article esmentat estan associades a un desequilibri en la implementació pràctica del currículum (sovint es dedica més temps i esforç al bloc de numeració i càlcul i a les expressions algebraiques que a la resta de blocs) i altres estan relacionades amb aspectes metodològics del treball geomètric a classe que, a vegades, se centra molt en el reconeixement de formes en el pla i en l'espai i en l'aplicació de fórmules per calcular longituds, àrees i volums, i posa menys l'accent a plantejar també situacions geomètriques més generals i obertes que impliquin exploració, experimentació, raonament visual, percepció espacial, moviment, orientació, ubicació, construcció, manipulació d'objectes, ús de programes de geometria dinàmica, etc. Un tipus d'activitats que cada vegada estan més presents a les classes de matemàtiques com a resultat de l'esforç de gran part del professorat per aportar un enfocament més viscut i competencial al treball geomètric.

PROPOSTA DE LÍNIES DE MILLORA

En primer lloc, per assenyalar possibles línies d'avenç cap a una metodologia més competencial en el treball de la geometria a l'educació secundària obligatòria, cal fer esment de dos documents de referència, plens d'idees ben pròximes a la pràctica d'aula:

- El document *Orientacions per a la millora de l'aprenentatge de la geometria a l'ESO*, publicat l'any 2012 per la Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat del Departament d'Ensenyament. En aquest document s'analitza la presència de la geometria en el currículum de matemàtiques i es fan consideracions sobre el seu procés d'aprenentatge, tot subratllant la necessitat de treballar a fons les dimensions de resolució de problemes, raonament i prova, connexions i comunicació i representació com a condició necessària per assolir la competència matemàtica i, en particular, per portar a terme un treball més competencial dels continguts geomètrics.
<*http://www.xtec.cat/web/curriculum/eso/orientacions*>

- El document *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria*, publicat l'any 2013 pel Departament d'Ensenyament. Es tracta d'un text que, per una banda, configura un marc general i, per l'altra, aporta elements aplicables directament al treball concret a classe. Aquest document identifica i comenta les dotze competències que formen el camp competencial matemàtic, articulades en quatre dimensions (resolució de problemes; raonament i prova; connexions; i comunicació i representació) i vinculades a un conjunt de continguts clau, cinc dels quals són de geometria. Per a cada competència s'aporten orientacions metodològiques i orientacions per a l'avaluació que, si bé es plantegen de manera general, en molts casos són particularment aplicables al camp geomètric. És un text ple d'idees, d'orientacions i d'exemples que manté sempre la frescor de l'aula. Per tal de contribuir a exemplificar les orientacions metodològiques, s'han seleccionat propostes de l'Aplicació de Recursos al Currículum (ARC) que poden ser especialment il·lustratives, algunes de les quals són de geometria <*http://apliense.xtec.cat/arc/competencies-basiques*>. A partir de les dimensions i les competències assenyalades en el document *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*, s'han elaborat propostes i activitats per als diferents blocs del currículum que s'inclouen en la segona part d'aquest article.
<*http://www20.gencat.cat/docs/Educacio/Home/Departament/Publicacions/Col_leccions/Competencies_basiques/competencies_mates_ESO.pdf*>

En el mateix sentit dels documents esmentats, per tal d'avançar en la resolució de les dificultats plantejades en l'apartat anterior, a continuació s'apunten tres línies de millora, cadascuna de les quals es correspon amb una o dues de les causes indicades.

1. **Equilibrar la implementació del currículum augmentant la presència de la geometria i moderant la del càlcul.** El temps escolar és un bé limitat i cal administrar-lo amb molta cura. Sovint, allargar unes setmanes el bloc d'aritmètica amb la bona intenció de recuperar un petit grup d'alumnes no aconsegueix el seu objectiu, n'avorreix d'altres i impedeix que després puguem fer una geometria més pràctica amb la qual potser els mateixos alumnes als quals inicialment volíem recuperar es trobarien més còmodes i en traurien més benefici educatiu. Amb tota la flexibilitat que calgui, és aconsellable un cert control del temps dedicat a les diferents parts del currículum. Una mesura interessant que pot ajudar a cercar aquest equilibri consisteix a començar per diferents blocs en els diferents cursos de l'ESO.

2. **Integrar en el treball geomètric activitats més competencialment riques basades en l'experimentació**, que promoguin el raonament, la comunicació, l'argumentació, que impliquin exploració, repte personal, descoberta, que mostrin la utilitat real del coneixement geomètric. Es tracta d'aconseguir que, en el guiatge per l'edifici de la geometria (i, en general, de la matemàtica), no tan sols es descriguin els espais ja construïts i se'n gaudeixi, sinó que es visqui personalment l'experiència de la construcció. A l'ARC i al web del CESIRE-CREAMAT es poden trobar molts exemples d'activitats d'aquest tipus. Així mateix, el Departament d'Ensenyament ha elaborat una proposta d'itinerari de Formació Interna de Centre dedicada a la geometria que promou una metodologia més competencial com la que aquí s'apunta. A continuació s'assenyalen tres ingredients que, per separat o integrats (encara millor!), ens poden ajudar a avançar en aquest sentit:

2.1. Impulsar la presència a les classes d'activitats que permetin viure, en primera persona, l'experiència de construir coneixement geomètric. Un tipus d'activitat que poden ser útils són les que segueixen, de manera més o menys estricta, quatre etapes:

- **Experimentació**: explorar, establir contacte amb les idees que estan en joc, temptejar, fer proves, prendre mesures, comparar, contrastar, manipular, construir, etc.
- **Descoberta**: observar una regularitat experimental, sovint sorprenent, que apareix en proves successives. No es tracta d'un coneixement que ve de fora sinó d'una descoberta personal, resultat de l'experiència.
- **Conceptuació**: posar en comú allò que s'ha descobert, perfilar bé la idea, sentir-la com a pròpia, esforçar-se a expressar-la correctament, arribar a una formulació compartida.
- **Demostració o formalització**: passar de la conjectura descoberta a la propietat demostrada a partir d'un raonament lògic. En alguns casos, la demostració no caldrà o no serà possible amb les eines conceptuals de què es disposa o no millorarà la comprensió de la idea i ens quedarem amb la constatació experimental.

Com es detalla a la segona part d'aquest document, es pot seguir un procés d'aquest tipus per introduir un gran nombre d'idees i de propietats geomètriques: entre d'altres, les relacions mètriques en triangles rectangles (els teoremes de Pitàgores, de l'altura i del catet); el fet que la divisió entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre és pi; el sorprenent teorema de Viviani; la relació entre un angle inscrit en una circumferència i l'angle central que comprèn; la determinació del volum d'una piràmide a partir del volum del prisma amb la mateixa base i altura; etc.

A l'ARC i al web del CESIRE-CREAMAT es poden trobar molts exemples d'activitats

2.2. **Emprar més material manipulable i més programari tipus GeoGebra en l'ensenyament de la geometria.** El material manipulable i el GeoGebra (o altres programes de geometria dinàmica) poden contribuir molt a fer que la geometria escolar recuperi l'experiència, la vivència directa, la intuïció... Podem discutir si les matemàtiques són una ciència experimental o no, però sembla prou clar que l'educació matemàtica, i especialment la geomètrica, hauria de ser-ho. Naturalment, no es tracta de prescindir dels necessaris aspectes d'abstracció tan característics del quefer matemàtic, sinó de dimensionar-los en la seva justa mesura i de concedir la importància que es mereix a l'experiència pràctica.

2.3. **Donar més presència als contextos reals a la classe de geometria**. Estem envoltats de geometria i seria important treballar-la de manera contextualitzada, aprofitant totes les possibilitats que ens ofereix el nostre entorn quotidià. Es tracta d'incorporar activitats geomètriques a classe, que estableixin connexions amb el món real de l'alumne, tan abundants, riques i naturals com sigui possible. Els models de problemes de les proves PISA i de l'avaluació de quart d'ESO són magnífics exemples de problemes contextualitzats i descrits amb un fort suport visual. En aquest sentit, hauríem d'atendre també a la manera com es plantegen els problemes, com es presenten a l'alumnat: sovint el text (l'enunciat) mata la frescor del context. S'haurien de plantejar més problemes a partir d'objectes, de fotografies, de plànols, de maquetes, de vídeos, de gràfics, de l'entorn, etc.

3. **Incorporar més geometria i raonament visual als blocs de continguts no estrictament geomètrics** (numeració i càlcul; canvi i relacions; i estadística i atzar). Amarant el currículum de matemàtiques amb activitats geomètriques aconseguirem estendre la presència de la geometria, construir enllaços entre la geometria i els altres blocs curriculars i millorar l'aprenentatge general mitjançant un augment de les representacions i dels raonaments visuals. En la segona part d'aquest document es presenta una mostra d'activitats d'aquest tipus. Tanmateix, a títol d'exemple, se'n citen ara algunes vinculades a cadascun dels blocs no estrictament geomètrics:

- En numeració i càlcul: nombres figurats (triangulars, quadrats, etc.), demostracions visuals de propietats numèriques a través de nombres figurats, fraccions amb parts de figures o cossos geomètrics, etc.

- En canvi i relacions: les identitats notables mostrades a partir de plantilles o de volums. Recuperar un tractament més geomètric dels continguts algebraics no tan sols donaria més presència a la geometria sinó que, sobretot, donaria més sentit als processos de manipulació simbòlica.

- En estadística i atzar: càlcul de probabilitats a partir d'àrees o de raonaments geomètrics. Per exemple, el problema de les monedes de Buffon (*Quina és la probabilitat que, en tirar una moneda, toqui una de les línies d'un conjunt de rectes paral·leles la distància entre les quals és exactament el doble del diàmetre de la moneda?*) i les seves variants.

PROPOSTES I EXEMPLES D’ACTIVITATS PER ALS DIFERENTS BLOCS DEL CURRÍCULUM

PRESENTACIÓ I ESTRUCTURA DEL MATERIAL

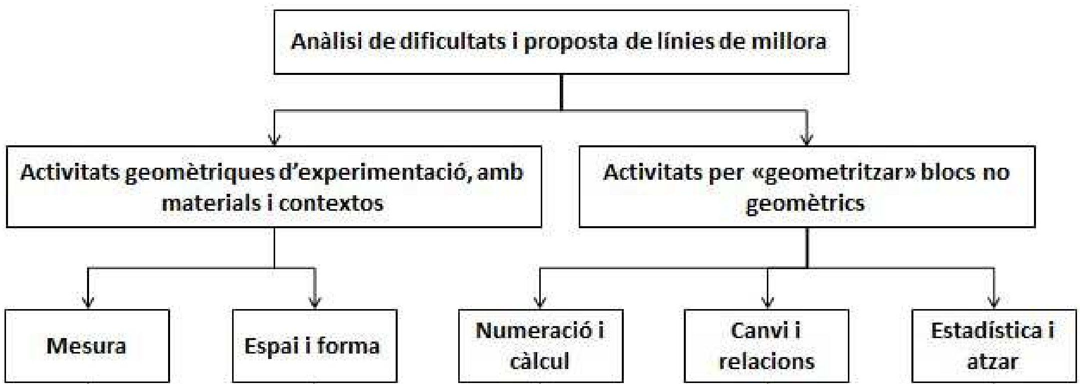
Les tres línies de millora acabades de proposar suggereixen canvis metodològics a les aules i, per tant, passen per un procés d’adaptació del professorat de matemàtiques i de progressiva incorporació a la pràctica docent concreta. Un procés que es pot veure afavorit pel fet que la percepció de la necessitat d’accentuar el treball geomètric és força compartida i que la geometria és un bloc de continguts especialment amable i ple de possibilitats didàctiques, tant atractives en la realització com eficients en els resultats.

> La percepció de la necessitat d’augmentar el treball geomètric a l’aula és força compartida

La primera d’aquestes propostes és de tipus general i organitzatiu, les altres dues són de caràcter més metodològic i conviden a avançar en la seva concreció. Per això, en aquesta segona part del document es concretaran més les propostes 2 i 3 aportant reflexions i exemples d’activitats per implementar-les a l’aula. Tant de bo que aquest material pugui contribuir a donar suport al professorat per tirar endavant un enfocament més reflexiu, constructiu, experimental i contextualitzat del treball de la geometria a l’educació secundària obligatòria. Si aconseguim resoldre el repte de millora plantejat en l’àmbit de la geometria, no tan sols millorarem la construcció d’idees geomètriques i la resolució de problemes en aquest camp, sinó que aconseguirem també un aprenentatge més viscut de les matemàtiques i un major assoliment de competències.

Al final de totes les propostes pràctiques s’inclouen cinc quadres (un per a cada bloc de continguts) que les relacionen amb les competències i els continguts clau que s’estableixen en el document *Competències bàsiques de l’àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l’educació secundària obligatòria,* publicat pel Departament d’Ensenyament.

Tot responent a les propostes de línies de millora 2 i 3, el material que es presenta s’estructura de la manera següent:



Per a cadascun dels cinc blocs del currículum (numeració i càlcul; canvi i relacions; mesura; espai i forma; i estadística i atzar) hi ha tres apartats:

- Unes observacions generals que aporten idees metodològiques, reflexions didàctiques i referències que poden ser útils.

- Una activitat descrita i analitzada amb detall. L'elecció d'aquesta activitat s'ha fet d'acord amb els criteris següents: existència de connexions amb altres àmbits; possibilitat de treball de camp o en context; facilitat de portar-lo a l'aula; possibilitat de ser aplicades a diversos nivells educatius. Aquesta proposta es desenvolupa d'acord amb l'esquema següent:

  - **Títol**: text molt curt que presenta l'activitat.
  - **Imatge**: fotografia, dibuix, esquema significatiu de l'activitat.
  - **Agrupament**: breu comentari sobre possibles agrupaments de l'alumnat en la implementació pràctica de l'activitat (treball individual, per parelles, en petits grups o tot el grup classe).
  - **Material**: inventari del material necessari per fer l'activitat a l'aula.
  - **Descripció**: explicació, a vegades força detallada i amb imatges, del desenvolupament de l'activitat a classe. És el nucli de la proposta.
  - **Continguts més rellevants que es tracten**: identificació dels continguts que, de manera més clara, es posen en joc en l'activitat.
  - **Dimensions i competències que es poden treballar especialment**: seguint el document *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria*, aquest apartat analitza l'aportació que pot fer l'activitat al desenvolupament de les competències i al treball entorn de les dimensions que les articulen (resolució de problemes; raonament i prova; connexions; i comunicació i representació).
  - **Comentaris i referències**: observacions que poden ser útils, suggeriments, indicacions d'ampliació, enllaços, etc.

- Un quadre amb altres activitats comentades breument i seqüenciades per ordre creixent de complexitat. Cadascuna d'aquestes activitats es descriu mitjançant un títol, una imatge, un comentari curt i l'enllaç a un document que conté una explicació més extensa de la proposta i que es troba al web del Departament d'Ensenyament. Cada professor pot seleccionar i modificar aquestes propostes atenent a les necessitats dels seus alumnes i al seu estil docent. Segons l'extensió de la descripció, aquestes propostes poden ser de dos tipus:

  - **Propostes àmplies** que segueixen el mateix esquema de presentació que l'activitat que s'inclou com a exemple detallat, amb els apartats que s'han indicat en el punt anterior. Són les primeres que apareixen en el quadre.
  - **Propostes curtes** que contenen el títol, una imatge, una descripció resumida i una anàlisi de les competències i els continguts clau que es treballen de manera especial. Són les darreres que apareixen en el quadre.

Les activitats presentades estan seqüenciades per ordre creixent de complexitat

ALGUNES ACTIVITATS D'EXPERIMENTACIÓ EN EL BLOC DE MESURA

OBSERVACIONS GENERALS

En el currículum de l'ESO els continguts de geometria estan a cavall entre el bloc d'espai i forma i el bloc de mesura. El primer conté els aspectes més qualitatius del camp geomètric, mentre que el segon conté els aspectes més quantitatius però no per això menys geomètrics, com mostra la mateixa etimologia del mot *geometria*, que, en grec, significa 'mesura de terres'. És com si el currículum, amb la voluntat d'assenyalar la importància del coneixement de la geometria, volgués dedicar-hi dos blocs amb una relació tan estreta que sovint les activitats geomètriques a l'escola estan vinculades als dos blocs de manera força indestriable.

Certament el bloc de mesura engloba continguts no geomètrics (com la mesura del temps o alguns aspectes d'aproximació numèrica, per exemple), però cal reconèixer que la part més important dels seus continguts sí que ho són, com és lògic. Aquest bloc curricular té dos eixos:

- Comprendre els atributs mesurables dels objectes, i les unitats, sistemes i processos de mesura.
- Aplicar fórmules, tècniques i instruments apropiats per obtenir mesures i fer estimacions raonables.

Es tracta de dues oportunitats esplèndides per portar contextos, aplicacions, situacions reals, objectes quotidians, etc. a l'aula, i per fer descobrir la importància social de disposar d'eines i procediments de mesura tan precisos com sigui possible.

Imaginem-nos un món amb quantitats però sense nombres, amb temps però sense calendaris, amb magnituds però sense mesures. Seria difícil de viure-hi i encara més difícil de comprendre'l, d'analitzar-ne els fenòmens i de preveure'ls. La mesura ens permet endinsar-nos, cada cop més, en la comprensió del món que ens envolta: des de les grans distàncies astronòmiques que ens obren el camí dels estels fins a les distàncies més petites que ens endinsen en la comprensió del que passa dins dels àtoms; des de les constants del nostre cos, que ens ajuden a preservar la salut, fins als paràmetres que asseguren la qualitat del nostre medi ambient; des de les longituds dels nostres desplaçaments fins a les mesures que manegen els GPS; etc. Amb raó Johannes Kepler (1571-1630) deia «mesurar és conèixer». En molts casos, conèixer el món que ens envolta és quantificar, i quantificar sempre és comparar amb una unitat, és a dir, mesurar.

El territori de la mesura permet treballar aspectes matemàtics diversos i, per tant, també ser treballat des de diverses parts de la matemàtica: concepte de mesurabilitat, unitats de mesura (el sistema internacional d'unitats, SI), idea de grandària (associada als ordres de magnitud), mètodes i aparells per a la mesura directa, mètodes i recursos per a la realització de mesures indirectes, precisió, estimació, exactitud, aproximació, errors, xifres significatives, etc.

Es poden traslladar els continguts geomètrics als altres blocs del currículum matemàtic

Així, els conceptes i les destreses entorn de la mesura estan tan presents en tota la matemàtica que fins i tot podrien desenvolupar-se i emprar-se al llarg de tot el curs escolar en lloc de ser tractats com un bloc a part, separat dels altres blocs del currículum de matemàtiques. En aquest sentit, el treball entorn de la mesura ofereix una possibilitat interessant per portar continguts geomètrics als blocs de numeració i càlcul (per exemple, aproximacions racionals a magnituds irracionals, precisió, errors, etc.), canvi i relacions (per exemple, l'estudi de la variació de magnituds geomètriques en funció d'una longitud o d'un angle) i estadística i atzar (per exemple, anàlisi de dades obtingudes a partir de mesures diverses).

I, més enllà de la nostra matèria, les activitats de mesura també estan ben presents en altres disciplines, com les ciències o la tecnologia, i es poden beneficiar molt de l'ús d'eines TIC. Es tracta d'un d'aquests grans nuclis temàtics que són un punt de trobada i que presenten, per tant, suggeridores possibilitats de col·laboració interdisciplinària. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), en els seus *Principles and standards for school mathematics* (2000), afirma: «Al llarg de l'escola secundària les oportunitats per emprar i comprendre la mesura sorgeixen de manera natural: en altres àrees de la matemàtica, en ciències o en educació tecnològica. Mesurar el nombre de revolucions per minut d'una màquina, les immenses distàncies en astronomia, o distàncies moleculars microscòpiques, amplia l'habilitat amb unitats de mesura derivades i amb mesuraments indirectes. Les calculadores i els instruments de mesura basats en els ordinadors faciliten la recopilació, l'emmagatzematge i l'anàlisi en temps real de les dades».

Certs aspectes del tema de mesura també ofereixen possibilitats d'enllaç amb l'educació visual i plàstica (maneig d'estris de dibuix i mesura, escales) i amb les ciències socials (interpretació de mapes; història del sistema internacional d'unitats i del seu antecessor, el sistema mètric decimal; la mesura del temps, origen del nostre calendari; percepció de l'esforç dels éssers humans, generació rere generació, per anar establint sistemes de mesures i d'organització del temps que els permetessin conviure; etc.). Així, la mesura es manifesta com un esplèndid camp de connexió interdisciplinària i amb el context quotidià.

Aspectes del bloc de mesura enllacen amb l'educació visual i plàstica o amb les ciències socials

Són moltes les activitats que es poden fer a classe entorn de la mesura. Serà bo que els alumnes treballin en grups, amb un bon grau d'autonomia i amb un ambient d'intercanvi d'idees, al llarg d'un procés per al qual es pot proposar un cert patró general de possibles accions:

1. Conjecturar, fer una estimació de la mesura que es busca. Si pot ser, posar-la en comú argumentant les raons que l'han fonamentada.
2. Establir la unitat de mesura més adequada.
3. Buscar o construir l'eina de mesura i conèixer bé com fer-la servir: cintes mètriques, làsers, goniòmetres, etc. La construcció d'un goniòmetre per part del mateixos alumnes és una proposta molt instructiva.
4. Mesurar tant com calgui amb les millors condicions per garantir la màxima exactitud.
5. Prendre consciència de l'existència d'errors en la mesura i de procediments que poden millorar-ne la precisió. Per exemple, fer la mateixa mesura repetidament i fer la mitjana dels resultats.
6. A vegades s'estarà fent una mesura indirecta. En aquest cas, la mesura que s'està determinant no és la que s'ha mesurat directament sinó que ha de ser deduïda per mitjà de procediments geomètrics o trigonomètrics. En aquests casos cal tenir en compte dues coses:
   - El domini dels conceptes i les relacions que cal posar en joc (semblances, teorema de Tales, escales, teorema de Pitàgores, càlcul de superfícies o de volums, relacions trigonomètriques, etc.).
   - La propagació d'errors en el procés de càlcul. Els errors en els mesuraments inicials poden créixer i afectar significativament el resultat final. Aquesta dificultat s'observa, per exemple, quan una longitud es calcula aplicant relacions trigonomètriques a partir d'un angle. L'alta sensibilitat del resultat de la longitud respecte dels errors que pugui tenir la mesura angular sol complicar algunes experiències escolars en aquest camp, ja que un petit error en l'angle pot produir errors notables en el resultat i, precisament, les mesures directes d'angles són difícils de fer amb precisió! Sovint, en aquest context, els alumnes tenen tendència a donar el resultat de les operacions realitzades amb moltes xifres decimals, com si més xifres impliquessin més exactitud. És important subratllar el fet que no

podem atorgar al resultat final més exactitud que la que tenien les dades de partida i que, potser, encara se n'ha perdut al llarg del procés de càlcul.

7. Valorar la plausibilitat de la mesura obtinguda («Té sentit en el context?» «És coherent amb altres dades de què es disposa?») i la seva precisió, expressant-la adequadament atenent, en especial, a les xifres significatives i a les unitats.
8. Si és possible, fer comprovacions comparant el resultat obtingut en el mesurament amb mesures procedents d'altres fonts: si es tracta d'un edifici, preguntant a un veí; si es tracta d'un objecte petit, submergint-lo en aigua i mesurant l'augment de volum; en altres casos, embolicant l'objecte per aproximar-nos a la mesura de la seva àrea o emplenant-lo per al volum.
9. Reprendre les conjectures realitzades inicialment i valorar el nivell d'aproximació que s'havia assolit.

En el document d'*Orientacions per a la millora de l'aprenentatge de la geometria a l'ESO* <*http://www.xtec.cat/web/curriculum/eso/orientacions*>, publicat pel Departament d'Ensenyament, s'apunten i es comenten diversos tipus d'activitats que poden ser especialment interessants des d'un punt de vista competencial: el mesurament de figures dibuixades sobre paper amb estris com el regle graduat o el transportador d'angles, la mesura experimental amb objectes reals (omplint, embolicant, comparant, submergint, etc.), la determinació de les mesures reals d'una figura o objecte dibuixats o construïts a escala, la realització o interpretació de dibuixos a escala, l'exploració de la relació entre longitud, àrea i volum en figures i cossos, la percepció de la diferència entre àrea i perímetre d'una superfície plana, l'estimació de mesures, els treballs de camp, etc. Les activitats experimentals de mesura, per la seva pròpia naturalesa d'aplicació pràctica a un context, són excel·lents oportunitats per treballar les dimensions que articulen la competència matemàtica: resolució de problemes; raonament i prova; connexions; i comunicació i representació.

A continuació es presenta un exemple detallat d'activitat en aquest bloc de continguts.

PROPOSTA D'ACTIVITAT

Pràctica contextualitzada de la mesura a través de tres verbs: rectificar, quadrar i cubicar



Agrupament

Sembla adequat fer totes les activitats d'aquesta proposta per parelles, llevat de la que porta per títol *Descripció d'un policub* dins de l'apartat de cubicar, que s'hauria de fer en equips de 4 o 5 alumnes.

Material

Mapes a escala (per exemple 1:50 000), fil, agulles, regle graduat, paper vegetal. Accés al Google Maps i al GeoGebra. Cubs encaixables (Multilink).

Descripció

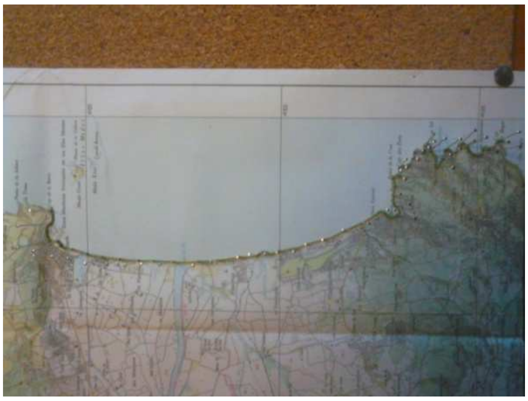
Mesurar és avaluar una magnitud per comparació amb una unitat. En el cas de longituds, aquesta comparació es fa amb una unitat lineal i, per tant, cal «posar recta», **rectificar**, la longitud. En dimensió dos la comparació es fa amb un quadrat unitat. La mesura de l'àrea d'una regió plana consisteix a comptar quants quadrats unitat hi caben i **quadrar** una figura és trobar un quadrat l'àrea del qual sigui igual a la de la figura. En l'espai, la comparació es fa amb un cub unitat i calcular un volum serà comptar cubs unitat, **cubicar**. *Rectificar*, *quadrar* i *cubicar* són tres verbs intuïtivament molt rics que descriuen l'essència del que significa mesurar i que conviden a portar-los a classe a través d'activitats pràctiques. A continuació es proposa una activitat contextualitzada que il·lustra cadascun d'aquests verbs.

Rectificar

En matemàtiques *rectificar* un arc de corba és calcular la seva longitud. Les corbes que es poden mesurar s'anomenen *corbes rectificables*. Precisament, una de les accepcions que recull el diccionari de l'IEC per al verb *rectificar* és «determinar la longitud d'un arc de corba». I també inclou una altra accepció ben intuïtiva: «fer recta alguna cosa». L'activitat següent exemplifica molt bé la idea de rectificar una corba.

Donem a cada parella d'alumnes un mapa a escala, agulles i fil i els demanem que estimin la llargada d'algun dels elements representats: un tram de costa, una carretera, un riu, un camí (si és un mapa de detall), etc. Se'ls proposa d'estendre el fil sobre el tram que es vol mesurar fixant-lo amb agulles (si es mulla una mica, el fil serà més fàcil d'adaptar al contorn). Un cop resseguit amb cura tot el tram, tallem exactament el fil, l'alliberem de les agulles i el tensem per posar-lo recte (el rectifiquem!). Després, tan sols falta mesurar-lo amb el regle graduat i aplicar l'escala per obtenir una estimació de la longitud buscada.

La fotografia següent mostra aquesta idea amb un fil fixat amb agulles que ressegueix el tram de la costa de Girona entre el cap de la Barra, a l'Estartit, davant de la Meda Gran, i el cap de Begur. El mapa està a escala 1:50 000.



Un cop rectificat, la longitud del fil és de 34,5 cm, que, atesa l'escala, dóna una estimació de 17,25 km per a aquest tram de costa. És important assenyalar que tan sols obtenim estimacions!

A continuació, convidem els alumnes a fer el mateix amidament emprant l'eina de mesura del Google Maps, que és molt gràfica i que sembla reproduir el mateix procediment que hem fet amb fil i agulles. Primer s'haurà d'ubicar clarament sobre el mapa el tram que es vol mesurar i, després, s'haurà d'anar ajustant un «fil virtual» al llarg del contorn. És molt interessant ampliar el mapa per anar aconseguint ajustaments més precisos. La imatge següent mostra un tram de l'amidament fet amb Google Maps. Fent ampliacions es poden afegir nous puntets per anar ajustant més i més el perfil de la costa (com si hi anéssim clavant noves agulles).

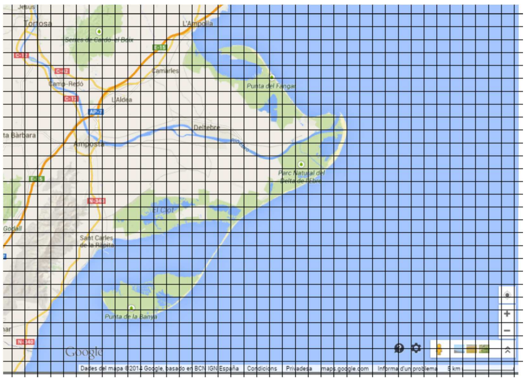
En aquest cas (fins al nivell d'ajustament a què hem arribat), s'ha obtingut una estimació per a la longitud de 17,15 km, significativament propera a l'estimació obtinguda amb el fil. És interessant observar que si la imatge fos infinitament precisa, mai no s'acabaria d'aconseguir ajustar-ho del tot. Una reflexió sobre mesurabilitat que justifica el fet que parlem d'estimacions i que obre les portes al món dels fractals.

Quadrar

Quadrar una figura és trobar un quadrat l'àrea del qual sigui igual a la de la figura i, sovint, el mot *quadratura* s'utilitza per fer referència al càlcul d'una àrea. Així, en anàlisi numèrica, els mètodes de quadratura són procediments per al càlcul d'integrals definides que, en una variable, equivalen al càlcul d'àrees de recintes limitats per corbes. Això sembla lògic si pensem que el quadrat unitat és el patró de comparació en la mesura de superfícies.

Emprant aquesta idea es pot plantejar una activitat a classe basada en quadricular una superfície i comptar quadrats. Donem als alumnes un mapa i, treballant per parelles, els demanem que assenyalin una zona clarament definida, l'àrea d ela qual es proposarà estimar. Atenent a l'escala del mapa es pot establir un «quadrat bàsic» del qual es conegui la superfície (observeu que, per a aquests quadrats, no seria adequat emprar l'expressió «quadrat unitat»). Els mapes que expressen l'escala gràficament van molt bé per fer-ho. És important tenir en compte que, en treballar superfícies, s'ha d'elevar al quadrat la relació que expressa l'escala. Després es quadricularà el mapa (es pot dibuixar la quadrícula sobre paper vegetal i superposar-la al mapa) per tal de comptar quants «quadrats bàsics» caben a la zona seleccionada. Si es multiplica el nombre de «quadrats bàsics» per la seva àrea, s'obtindrà una estimació de la superfície que es busca. Novament cal assenyalar el fet que es tracta d'una estimació, ja que els límits de la zona que es mesura normalment no coincidiran amb les línies exactes de la quadrícula i caldrà fer compensacions.

Aquesta activitat es pot fer de manera més àgil capturant una pantalla del Google Maps, incorporant-la al GeoGebra i dibuixant-hi la quadrícula amb les eines d'aquest programa. La imatge següent mostra la zona del delta de l'Ebre sobre la qual s'ha dibuixat una quadrícula.



Observant l'escala gràfica que hi ha a la part inferior dreta (que indica 5 km), es pot deduir que cada quadrat d'aquesta quadrícula correspon a 1,5625 km^2. A partir d'aquí, delimitant clarament la zona que es vol mesurar (per la part interior es pot prendre com a límit la carretera que uneix l'Ampolla i Sant Carles de la Ràpita) i comptant el nombre de quadrats (amb les compensacions que calgui fer en els límits), es podrà deduir una estimació de l'àrea de la zona. Malgrat que a la pràctica poden obtenir-se resultats força ajustats a la realitat, és interessant fer observar als alumnes les diverses fonts d'imprecisió que afecten el procediment: la definició del contorn, l'amplitud de la zona, el comptatge del nombre de quadrats, la mesura real d'un dels quadrats de la quadrícula deduïda a partir de l'escala gràfica, etc.

Cubicar

Segons el diccionari de l'IEC, *cubicar* és «determinar el volum d'un cos coneixent les seves dimensions». És un mot molt gràfic si es té en compte que mesurar el volum d'un cos significa comparar-lo amb el d'un cub unitat, com si es tractés de comptar el nombre de cubs que hi caben. Malgrat que és un verb molt bonic, actualment s'usa tan sols en camps molt específics: a la indústria forestal per referir-se al càlcul de volums de fusta i en el motociclisme per referir-se a les cilindrades de les motos («aquesta moto cubica 250 cm^3»).

Un bon material per visualitzar cossos formats únicament per cubs (anomenats policubs) són els cubets encaixables com els que es mostren en la imatge següent, un dels materials més polivalents per a la classe de matemàtiques.

Tot seguit s'apunten tres exemples del seu ús en el camp de la geometria:

- Càlcul de volums de policubs prenent com a unitat un cub. Inicialment calcularem volums d'ortoedres observant que el nombre de cubs que els formen és el resultat de multiplicar l'altura per l'amplada i per la llargada. Després emprarem peces més irregulars per tal de deduir el nombre de cubs sense comptar-los. També es poden treballar les àrees laterals i la suma de les arestes.

- Descripció d’un policub. Es formen dos equips de 4 o 5 alumnes cadascun i se separen de manera que no tinguin contacte visual entre ells. Es dóna al primer grup una peça policúbica amb una forma irregular i es demana a l’altre equip que la descrigui per tal que pugui construir-ne una d’idèntica (primer sense fixar-se en els colors i després ja tenint-los en compte). Descobriran que, sorprenentment, no és gens fàcil i que, fins i tot quan sembla que tot ha quedat clar, en comparar la peça original amb la peça construïda hi ha moltes diferències. És una activitat que crea la necessitat d’establir un sistema de codificació que permeti una comunicació eficient (per exemple, emprant coordenades enteres a l’espai).

- Identificació de les projeccions planes d’un policub: alçat, planta i perfil. I, viceversa, construcció d’un policub a partir de les seves projeccions planes.

Continguts més rellevants que es tracten

Càlcul de longituds, àrees i volums. Escales. Visualització de cossos a l’espai. Projeccions planes. Raonament geomètric.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment

Aquesta proposta d’activitat permet treballar especialment la competència 2 de la dimensió de resolució de problemes (Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes) i la competència 8 de la dimensió de connexions (Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes). Si es treballa amb Google Maps i amb GeoGebra, s’estarà contribuint a desenvolupar la competència 12 de la dimensió de comunicació i representació (Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics).

Comentaris i referències

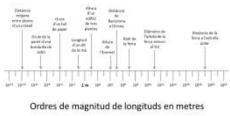
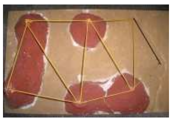
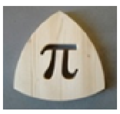
Aquestes activitats treballen molt directament el sentit del que significa mesurar longituds, àrees i volums com a comparació amb una unitat, i entronquen amb interessants referents històrics. Així, per exemple, a classe es pot citar el problema de la quadratura del cercle o indicar que la comparació entre línia corba i línia recta ja s’estudia en un tractat sobre rectificació de corbes que va escriure Pierre de Fermat l’any 1659: *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione dissertatio geomètrica*.

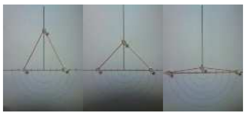
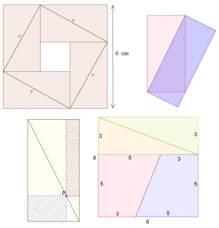
Pel que fa a les activitats de rectificar i de quadrar, a l’ARC hi ha un element que també pot ser útil: *Mesura de longituds i d’àrees amb fil i paper vegetal quadriculat* <*http://apliense.xtec.cat/arc/node/1265*>. Com a complement de les activitats amb policubs són interessants alguns *applets* de l’excel·lent pàgina web del Freudenthal Institut: <*http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/en/*> (*Guess the view*, *Cube houses*, *Profile viewer*).

EXEMPLES D’ACTIVITATS

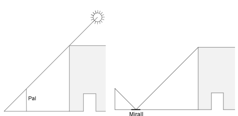
El quadre següent descriu una mostra d’activitats d’experimentació que poden ser útils per presentar i desenvolupar continguts entorn a la mesura. Aquestes activitats es poden trobar desenvolupades a la pàgina <*www.xtec.cat/web/curriculum/eso/orientacionsgeometria*>.

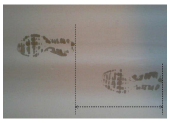
Propostes ampliades

Activitat	Presentació
Rectificar, quadrar i cubicar 	Mesurar és avaluar una magnitud per comparació amb una unitat. *Rectificar*, *quadrar* i *cubicar* són tres verbs intuïtivament molt rics que descriuen l'essència del que significa mesurar i que conviden a portar-los a classe per mitjà d'activitats pràctiques. Es proposa una activitat contextualitzada que il·lustra cadascun d'aquests verbs.
Explorant els ordres de magnitud 	El coneixement del món que ens envolta implica la mesura o l'estimació de magnituds molt grans (masses d'estels, distàncies astronòmiques, temps transcorregut des de la formació de les roques més antigues, etc.) i magnituds molt petites (distància mitjana entre dos àtoms d'un cristall, massa d'un electró, temps en què la llum recorre una distància d'un metre, etc.).
Un passeig per l'origen de l'SMD i de l'SI 	El sistema internacional d'unitats (SI) i el seu antecessor, el sistema mètric decimal (SMD), són eines fonamentals per a la ciència, la tecnologia, el comerç, etc. El seu coneixement és clau en la formació dels alumnes.
Mesurem π i mesurem amb π  	El nombre π és el protagonista indiscutible del món de les figures rodones. El càlcul de la longitud d'una circumferència, de l'àrea d'un cercle i de la superfície i el volum d'un cilindre o d'una esfera requereixen emprar el nombre π.

Perímetres i àrees, àrees i volums 	A vegades s'observa certa confusió entre la igualtat de perímetres i la igualtat d'àrees en figures planes i entre la igualtat d'àrees laterals i la igualtat de volums en cossos tridimensionals. És convenient posar-hi atenció!
Problemes per pensar una mica entorn de la mesura 	La creació a classe d'un ambient de resolució de problemes, propici a fer-se preguntes i a afrontar reptes, és fonamental en educació matemàtica, i la mesura ofereix moltes oportunitats en aquest sentit. Per això, en un recull d'activitats entorn de la mesura, no podrien faltar-hi alguns reptes. En la proposta *Problemes per pensar una mica entorn de la mesura* es presenta, a tall de mostra, una petita llista amb alguns problemes que conviden a pensar. S'ha procurat que cada problema (sigui a l'enunciat, sigui a la resolució) tingui un punt de sorpresa, de curiositat, que el faci especial.
La mesura en el vídeoMAT vídeoMAT matemàtiques per respondre preguntes	El projecte vídeoMAT pretén promoure una perspectiva aplicada i funcional de les matemàtiques a l'escola, tot convidant els alumnes a formular-se una pregunta, respondre-la amb eines matemàtiques i explicar-la en un vídeo de tres minuts. La col·lecció permanent completa es troba a l'enllaç <*http://www.videomat.cat/?p=417*>.

Propostes curtes

Activitat	Presentació
La mesura del nostre entorn quotidià 	Els objectes i els espais que ens envolten estan plens de possibilitats per practicar la mesura. Cadascun d'aquests possibles mesuraments és una oportunitat educativa que convida a conjecturar, a establir la unitat adequada, a buscar l'instrument de mesura, a mesurar amb cura, a fer els càlculs que calgui, a valorar la plausibilitat i precisió del resultat, a fer comprovacions (mirant etiquetes, submergint, consultant plànols, preguntant, etc.), a contrastar el resultat amb la conjectura inicial...
Mesura de l'alçària d'un edifici, d'una grua, d'un arbre... 	Aplicant les relacions de proporcionalitat derivades de la semblança de triangles o la definició de tangent d'un angle (a quart d'ESO) podem mesurar l'alçària d'un edifici, d'una grua, d'un arbre, etc. Les tècniques són diverses: mesurant simultàniament l'ombra d'un pal de longitud coneguda i la de l'edifici (l'arbre o la grua); situant un observador en el punt en què es veu reflectit el cim de l'edifici en un mirall col·locat horitzontalment a terra; etc.

La semblança i la proporcionalitat 	La semblança de figures i la proporcionalitat entre les seves mesures és un concepte clau que cal que els alumnes coneguin bé i que permet interessants activitats d'experimentació en contextos reals: les fulles d'una branca d'heura, els fulls en format DIN, la proporció àuria, etc.
Plànols, mapes i maquetes: la proporcionalitat feta escala 	Les escales de mapes, plànols i maquetes expressen raons de proporcionalitat entre les mesures dels models i les de la realitat. El treball amb mapes, amb plànols i, si pot ser, amb maquetes respon a una necessitat formativa i, alhora, té la capacitat motivadora que li dóna la seva utilitat en un context real, com per exemple, interpretar i dibuixar plànols i mapes a escala.
Peus, passos, braços i ales 	La proposta que es descriu, molt experimental i contextualitzada, permet treballar la mesura, la mitjana, els gràfics de núvols de punts, l'ajustament mitjançant rectes, l'extrapolació. Treballarem a partir de mesures directes dels alumnes: l'alçada, la llargada del peu, l'envergadura dels braços, etc.
Volums emplenant cossos amb aigua 	El càlcul de volums és especialment interessant en el cas de cossos en els quals es pugui comprovar el resultat: perquè porten una etiqueta que l'indica, perquè es poden submergir i mesurar el volum que desplacen o perquè es poden emplenar d'aigua. Es poden prendre mesures del model o mostrar-ne equivalències.

ALGUNES ACTIVITATS D'EXPERIMENTACIÓ EN EL BLOC D'ESPAI I FORMA

OBSERVACIONS GENERALS

La geometria és una de les parts de la matemàtica més lligada a la percepció sensorial del món que ens envolta. El fet de viure inexorablement submergits en l'espai físic, ple de formes i d'imatges fa que la geometria sigui un dels territoris de l'educació matemàtica en què hi ha més possibilitats de contextualitzar, de cultivar la intuïció i de proposar a l'alumnat experiències directes amb objectes i amb situacions de l'entorn.

La riquesa competencial de les activitats d'experimentació en geometria actualment es veu reforçada per l'ús de dos tipus d'eines que són complementàries: els materials manipulables i els programes de geometria dinàmica com el GeoGebra. Precisament l'itinerari de formació interna de centre (FIC) *La geometria a l'educació secundària obligatòria* <*http://www.xtec.cat/web/formacio/fecb/fic/itineraris/guiats/sec_geometria*>, en la fase de construcció i experimentació, dedica dos blocs respectivament a *Geometria amb material manipulable* i a *Geometria amb GeoGebra*. Aquest itinerari pot contribuir molt a impulsar avenços metodològics en el treball entorn dels continguts geomètrics en els centres d'educació secundària. La dinàmica de formació que planteja es basa en l'aportació d'idees i recursos per a la reflexió conjunta del professorat, en l'experimentació de propostes a l'aula i en l'adopció d'acords concrets. El detall de totes les seves activitats i materials es pot consultar a l'enllaç <*http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/fic/cma/cma04/index*>.

En treballar el bloc d'Espai i forma és fonamental l'ús de materials manipulables. En el document *Orientacions per a la millora de l'aprenentatge de la geometria i la mesura* que va publicar la Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat del Departament d'Ensenyament el juny de 2012, s'afirma: «En el treball geomètric caldria donar força importància al plantejament de situacions en l'espai i a la manipulació de figures tridimensionals per superar les dificultats de visualització espacial, sense la qual el treball en dues dimensions no passa de ser una convenció mancada d'entitat real [...]. Cadascuna d'aquestes activitats, que parteixen de la manipulació, ha d'encaminar-se cap a una anticipació de les experiències, cap a una visualització mental de les situacions que finalment permetin als alumnes d'aquest cicle poder conjecturar i solucionar problemàtiques senzilles sense la necessitat de l'ús previ de materials. Tot i això, aquesta visualització mental no s'ha d'entendre com una "superació" de la manipulació, sinó com una capacitat diferent que l'alumne desenvolupa; el treball manipulatiu haurà de continuar essent present en l'activitat matemàtica de l'alumnat en totes les etapes».

La importància d'aquest tipus de materials en l'educació matemàtica es posa de manifest en moltes referències. En citem dues:

Pere Puig Adam (1958) afirma: «Aquest material [...] vist pels matemàtics situats des de l'elevada perspectiva abstracta, són meres concrecions il·lustradores, simple vestimenta convenient per facilitar momentàniament comprensions dificultoses; però per a l'educador matemàtic, que no perd la perspectiva dels processos inicials d'abstracció, aquest material és molt més: representa quelcom substancial amb la seva funció educativa. Aquest material, estructurat en forma de models, té no sols la funció de traduir ocasionalment idees matemàtiques, sinó també d'originar-les, de suggerir-les».

George Pólya (1963), després de citar la frase de Kant de la *Crítica de la raó pura*, «Tot coneixement humà comença amb intuïcions, continua amb concepcions i finalitza amb idees», en proposa la següent lectura didàctica: «L'aprenentatge comença amb acció i percepció, continua amb paraules i conceptes, i ha de finalitzar amb hàbits mentals desitjables. [...] "acció i percepció" us ha de suggerir manipular i veure coses concretes com pedres, o pomes, o reglets Cuisenaire; o regle i compàs; o instruments en un laboratori».

Aquestes afirmacions, que es refereixen a l'educació matemàtica en general, encara són més aplicables, si és possible, en el camp de la geometria, en què el sentit d'allò concret, de l'experimentació, de la vivència de la forma i de la transformació són més presents que en cap altre territori matemàtic. De l'experimentació en sorgeixen descobertes que es van perfilant en conceptes.

"Tot coneixement humà comença amb intuïcions, continua amb concepcions i finalitza amb idees".
I. Kant

Quan aquest procés es concreta en experiències escolars podríem distingir, tal com es destaca en la primera part d'aquest document, unes etapes que es posaran clarament de manifest en algunes de les propostes d'activitats geomètriques del quadre que es presenta més endavant:

Experimentació: els alumnes exploren situacions geomètriques (sigui manipulant objectes, sigui amb l'ús d'un programa de geometria dinàmica com GeoGebra, sigui dibuixant sobre paper, etc.), produeixen canvis, fan comparacions, conjecturen i proven, temptegen... Això tan sols serà possible si el docent crea les condicions que aconsegueixin que l'alumne i el grup s'immergeixin en un ambient de recerca.

Descoberta: a partir de l'experimentació els alumnes observen regularitats, patrons, relacions entre magnituds o entre figures. Probablement el docent haurà ajudat a conduir l'experimentació perquè s'arribi a aquest punt, però l'alumne hauria de viure la descoberta com una experiència personal.

Conceptuació: cal perfilar bé la descoberta que s'ha fet. Serà bo, aprofitant la dimensió social de la classe, posar-la en comú amb les paraules de cadascú i, conjuntament, aconseguir afinar-la i expressar-la de la manera més precisa possible. Ara la descoberta ja no és una idea individual sinó que ha esdevingut patrimoni del grup.

Demostració o formalització (si cal!): encara que la regularitat observada experimentalment s'hagi acomplert en la pràctica de cada alumne, no passa de ser una conjectura que, en alguns casos, serà convenient tant de demostrar mitjançant un raonament lògic com de formalitzar per assegurar una expressió més precisa i concisa.

En alguns casos, les activitats d'experimentació (amb materials, amb GeoGebra, etc.) permeten abordar temes més avançats del previst, de manera natural, sense forçar la situació. A vegades són els mateixos alumnes els qui van més enllà, impulsats per la seva experimentació i la seva curiositat. No ens hauria de fer por avançar idees, el que ens ha de fer por és avançar formalitzacions. Una cosa són els conceptes i una altra és el vestit formal que posem a aquests conceptes. El rigor formal és important en cert nivell del treball matemàtic (indubtablement a batxillerat, per exemple), però la impossibilitat d'una fonamentació rigorosa no hauria de ser objecció per a la descoberta més fresca, vivencial, experimental d'idees matemàtiques la formalització o demostració de les quals, si cal, es farà posteriorment.

Els programes de geometria dinàmica, com el GeoGebra, han obert un amplíssim camp de possibilitats d'experimentació

Un exemple paradigmàtic d'això és el tema de les còniques. Actualment el treball amb còniques està inclòs al batxillerat. Sembla evident que tractar a l'ESO les equacions de les còniques, per a molts alumnes seria realment prematur. Però cal reconèixer que certs aspectes de les el·lipses o de les paràboles (la definició com a llocs geomètrics, alguns mètodes de construcció, certes propietats focals, aplicacions, etc.) es podrien «descobrir» a l'ESO mitjançant experiències amb materials o de construccions amb eines TIC, per exemple.

Els programes de geometria dinàmica (i, en particular, el GeoGebra, que és el més estès a casa nostra) han obert un amplíssim camp de possibilitats per a les activitats d'experimentació en l'ensenyament de la geometria. La facilitat de fer construccions geomètriques i la possibilitat de deformar els objectes, observant aspectes que canvien i patrons invariants, permet un treball tant potent pel que fa als continguts que es poden posar en joc com motivador pel que té d'atractiu i no excloent per a qualsevol tipus d'alumnat. La disponibilitat d'eines com el

GeoGebra, en si mateixa, convida a canvis de fons en l'enfocament de tota la geometria escolar. Naturalment s'inclou en el quadre de propostes de l'apartat següent.

Tant els materials manipulables com les eines tecnològiques de què disposem actualment poden ajudar a impulsar un enfocament més constructiu i contextualitzat de la geometria. Emma Castelnuovo, en el pròleg de l'edició catalana del seu llibre *La geometria,* afirma: «Això és el que es proposa el text: no es tracta d'una imposició axiomàtica que no pot ser entesa entre els 11 i els 14 anys; no es tracta de fer aprendre definicions que sovint els semblen exigències absurdes i que es limiten, per tant, a paraules sense sentit apreses de memòria. El llibre, en canvi, es preocupa d'incitar els alumnes, a través dels problemes motivats per una dinàmica concreta i de les diverses qüestions de la realitat en què vivim, a construir ells mateixos la matemàtica amb l'ajut del professor. [...] un ensenyament d'aquest tipus converteix les matemàtiques en una disciplina de les més engrescadores».

Hi ha moltes activitats per fer a classe que responen a un enfocament més constructiu i reflexiu de la geometria, on hi ha lloc per a la creativitat, la imaginació, el descobriment, la curiositat, etc.

A continuació se citen dues webs que contenen excel·lents propostes:

- L'apartat *Geometria!* de la web del CESIRE CREAMAT (de fet el títol complet és *Impulsem la geometria*). És especialment interessant el bloc *Proposta de la setmana*, que presenta dinou activitats obertes en l'enfocament i potents en els continguts que es tracten. Malgrat que en molts casos estan pensades per a l'educació primària, són perfectament adaptables a la secundària obligatòria.
  <*http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/impulsem-la-geometria*>.

- La web *Illuminations* <*illuminations.nctm.org*> del National Council of Teachers of Mathematics (NTCM), que proporciona una bona quantitat tant del que anomenen «lliçons» com d'*applets* interactius, classificats per etapes i per blocs. En particular hi ha moltes propostes de geometria.

A continuació es presenta un exemple detallat d'activitat en aquest bloc de continguts.

PROPOSTA D'ACTIVITAT

Un sender de gran recorregut pel territori de les figures rodones

Agrupament

El camí s'estructura en diferents trams. L'activitat que es proposa en el primer tram pot fer-se per parelles. Els altres trams els farà de manera conjunta tot el grup classe.

Material

Objectes cilíndrics i fils. Un cercle de cartró partit en sectors circulars amb un tros de cinta adhesiva que manté unit el contorn. Un paquet de galetes cilíndric. Cilindres i cons de plàstic amb la mateixa base i la mateixa altura emplenables amb aigua. Si es vol, també prismes i piràmides. Una esfera dividida en peces quasi còniques.

Descripció

Al llarg de l'ESO es van presentant conceptes referents a figures rodones i expressions per al càlcul d'alguns dels seus elements: longitud d'una circumferència, àrea d'un cercle, volum d'un cilindre, volum d'un con, volum d'una esfera, àrea d'una esfera, etc. Però molt sovint aquestes fórmules s'introdueixen sense cap suport argumental, de manera memorística. Fins a cert punt això és lògic, atès que una demostració rigorosa requeriria eines que superen de molt l'abast de l'ESO. Tanmateix, si bé no és possible fer demostracions d'aquestes fórmules, sí que es poden fer raonaments plausibles que mostren intuïtivament la seva validesa. Convé fer dos apunts entorn d'aquests raonaments:

- A vegades no estan tan allunyats com pugui semblar de la demostració rigorosa. Sovint la diferència és un pas al límit, per exemple, convertint una suma finita en una integral.

- Molt sovint, un raonament d'aquest tipus ajuda més a la comprensió dels conceptes implicats que una demostració formal. En aquest sentit, és molt adient reproduir les paraules de Puig Adam (1960): «No sempre una demostració basada en la reducció a veritats anteriors, qualitat característica de les demostracions de l'escola grega, és la que tradueix les essències de la propietat demostrada, ni molt menys la més adequada des del punt de vista didàctic. Per als matemàtics orientals, demostrar era reduir a l'evidència directa, que el nen percep molt millor que un encadenament lògic, del qual no sol veure ni l'abast ni la necessitat».

El sender que es dibuixa en aquesta proposta travessa el territori de les figures rodones tot presentant materials i raonaments per anar assolint, tram a tram, els diversos conceptes (longitud d'una circumferència, àrea d'un cercle, volum d'un cilindre, volum d'un con, volum d'una esfera, àrea d'una esfera, etc.). A la pràctica, no es faran tots els trams seguits sinó que s'estendran al llarg de tota l'ESO, tanmateix pot ser bo imaginar-ho com un camí encadenat per visualitzar clarament com van encaixant els diferents trams.

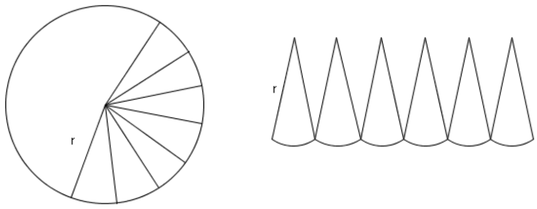
Tram 1: fins a la longitud d'una circumferència

El nombre π i la longitud d'una circumferència. Cada alumne porta un cilindre (un pot, una tapadora, un tros de tub gran, etc.) i hi enrotlla un fil al voltant. Dividint la longitud del fil entre el diàmetre del cilindre, els diferents alumnes obtenen un valor significativament igual. És el nombre π. Vegeu la proposta d'activitat que porta per títol *Mesurem π i mesurem amb π* en l'apartat «Exemples d'altres activitats» del bloc de mesura.

A partir d'aquí podem concloure que la longitud l d'una circumferència de diàmetre d i radi r ve donada per l'expressió $l = \pi d = 2\pi r$.

Tram 2: des de la longitud d'una circumferència fins a l'àrea d'un cercle

Iniciem el camí a partir de la longitud d'una circumferència i prenem un cercle de cartró dividit en sectors circulars amb un tros de cinta adhesiva que manté unit el contorn. En obrir-lo pels diferents radis, s'obté un conjunt de sectors enllaçats per la base. tal com mostra la imatge següent.



És evident que l'àrea del cercle coincidirà amb la suma de les àrees dels sectors, cadascun dels quals es podrà aproximar per l'àrea d'un triangle d'altura *r* i bases b_1, b_2, b_3, b_4 ... Així, s'obté que l'àrea del cercle podrà aproximar-se per

$$\frac{1}{2}rb_1 + \frac{1}{2}rb_2 + \frac{1}{2}rb_3 + \frac{1}{2}rb_4 + \cdots$$

Traient factor comú, tindrem:

$$\frac{1}{2}r(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots)$$

Però la suma de les bases és la longitud de la circumferència que, segons hem deduït en el tram anterior, és $2\pi r$; per tant, tindrem que:

$$\grave{A}rea\ del\ cercle \approx \frac{1}{2}r2\pi r = \pi r^2$$

Quan el nombre de sectors sigui molt gran les bases seran molt petites i el sector s'aproparà més a un triangle, de manera que, quan el nombre de sectors tendeixi a l'infinit, el signe d'aproximació de l'expressió anterior s'anirà convertint en una igualtat (observeu que estem fent un pas al límit des de la intuïció!). Així tindrem:

$$\grave{A}rea\ del\ cercle = \pi r^2$$

I s'haurà arribat al destí d'aquest tram de camí!

Tram 3: des de l'àrea d'un cercle fins al volum d'un cilindre

La fotografia mostra un paquet de galetes. És «quasi un cilindre» format per la superposició de «quasi cercles».

El volum del cilindre serà el producte del d'una galeta pel nombre de galetes que el componen. Així, sembla intuïtiu deduir que el volum del cilindre serà l'àrea de la base per l'altura. Si anomenem r el radi de la base i h l'altura, aplicant el que hem deduït en el tram anterior tindrem que:

$$Volum\ del\ cilindre = \pi r^2 h$$

Tram 4: des del volum d'un cilindre fins al volum d'un con

En aquest tram emprarem el material que es veu en la fotografia següent: es tracta de parelles formades per un cilindre i un con amb la mateixa base i la mateixa altura, i per diversos prismes i piràmides també amb la mateixa base i la mateixa altura. Són peces de plàstic buides que es poden emplenar d'aigua.

Emplenarem el con d'aigua i, a continuació, la passarem al cilindre. L'aigua ocuparà una part del cilindre. Tornarem a fer la mateixa operació i encara la farem un tercer cop, i descobrirem que al cilindre hi caben exactament tres cons de la mateixa base i la mateixa altura. Aquesta experiència, aplicant el que hem deduït en el tram anterior, ens permetrà afirmar que si anomenem r el radi de la base i h l'altura del con, tindrem:

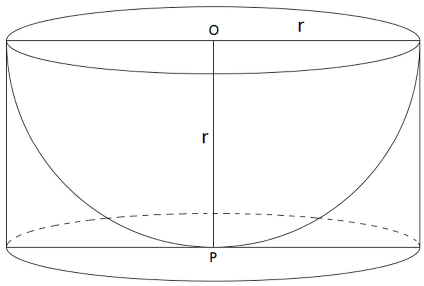
$$Volum\ del\ con = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Tram 5: des del volum d'un con fins al volum d'una esfera

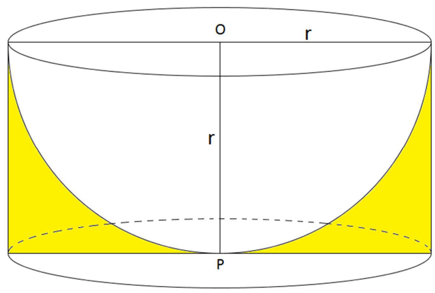
Així arribem a un dels trams més delicats i bonics del camí, el que ens conduirà fins al volum d'una esfera. Algunes idees que es posaran en joc requeriran certa atenció i temps perquè els alumnes puguin seguir-ho bé. Necessitarem dues eines: el principi de Cavalieri i l'escudella de Galileu. Aturem-nos-hi!

El **principi de Cavalieri** afirma que si dos cossos tridimensionals són tals que, tallats a la mateixa altura, donen sempre dues seccions d'àrees iguals, llavors tenen el mateix volum. Aquesta afirmació sembla bastant intuïtiva, tot entenent el volum com la s*uma* de seccions (recordem el paquet de galetes!). De fet, és una idea molt pròxima al càlcul de volums per integració, ja que la suma d'infinites seccions d'amplada infinitesimal serà una integral.

L'**escudella de Galileu** és un cos tridimensional que es construeix així: prenem un cilindre tal que el radi de la base i l'altura valguin r i col·loquem dins d'aquest cilindre una semiesfera de radi r, com mostra la figura següent.

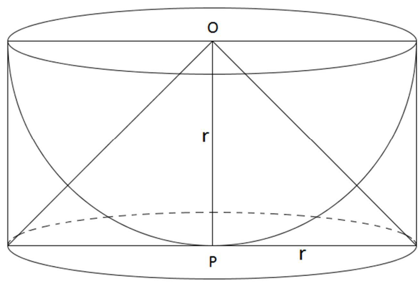


L'espai de base circular que queda entre el cilindre i la semiesfera és l'escudella de Galileu. En la figura següent se'n mostra una secció en groc.



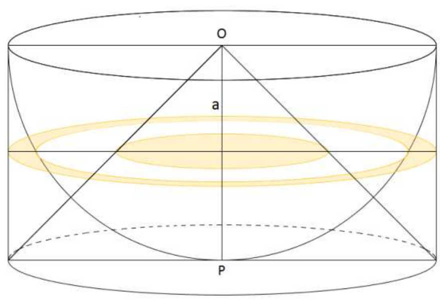
Conegudes les eines, comencem el trajecte!

Dins del cilindre posem un con tal que el radi de la base i l'altura valguin , tal com mostra la figura següent:



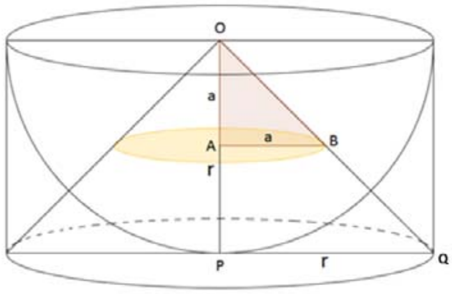
Això recorda molt les parelles de cons i cilindres que hem fet servir en el tram 4 del camí, de manera que està clar que el volum del con serà una tercera part del volum del cilindre. Tanmateix aquest fet, per ara, no l'utilitzarem.

Ara tallarem aquest cos per un pla paral·lel a la base que dista unitats del punt O. Observem que el con dóna com a secció un cercle i que l'escudella de Galileu dóna com a secció una corona circular. En la figura següent estan acolorides.

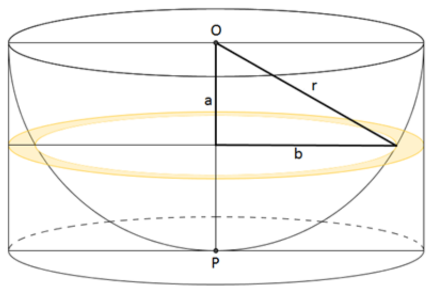


I aquí es produeix un resultat sorprenent: aquestes dues seccions tenen la mateixa àrea sigui quina sigui l'altura per on fem el tall. Ho demostrarem tot seguit.

En primer lloc, calculem l'àrea del cercle resultant de seccionar el con. Si el pla estava a distància del punt O, aplicant el teorema de Tales en els triangles OPQ i OAB, observarem que el radi del cercle (AB) serà també a. Per tant, la seva àrea serà πa^2.



Ara calculem l'àrea de la corona circular resultant de seccionar l'escudella de Galileu. El radi exterior de la corona serà r i el radi interior (b) es calcularà aplicant el teorema de Pitàgores (vegeu la figura següent): $b = \sqrt{r^2 - a^2}$. Llavors l'àrea de la corona serà $\pi r^2 - \pi b^2 = \quad = \pi r^2 - \pi(r^2 - a^2) = \pi a^2$.



Així doncs, acabem de demostrar que tallant a una mateixa altura el con i l'escudella de Galileu, sempre obtenim seccions de la mateixa àrea. Aplicant el principi de Cavalieri haurem demostrat que el con i l'escudella de Galileu tenen el mateix volum. Com que el volum del con és una tercera part del volum del cilindre, resulta que el volum de l'escudella de Galileu també serà una tercera part del volum del cilindre:

$$Volum\ de\ l'escudella = \frac{1}{3}\pi r^2 r = \frac{1}{3}\pi r^3$$

Ara bé, el volum de la semiesfera serà el volum del cilindre menys el volum de l'escudella de Galileu. Així tindrem:

$$Volum\ de\ la\ semiesfera = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

I, per tant, podrem deduir el volum de l'esfera completa:

$$Volum\ de\ l'esfera = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Per un resultat tan important valia la pena aquest trajecte llarg però bonic!

Tram 6: des del volum d'una esfera fins a la superfície d'una esfera

La fotografia següent mostra una esfera composta per «quasi cons» (aproximadament com les boletes de xiprer) i la de la dreta mostra els «quasi cons» separats (observeu que, a diferència dels cons, les seves bases són casquets esfèrics).


Seguint aquesta idea, podríem dividir una esfera en molts petits «quasi cons». Tants i tan petits com vulguem! Com més «quasi cons» tinguem, seran més petites i més properes a un con. El volum de l'esfera serà la suma del volum d'aquests «quasi cons», que tots tindran per altura el radi de l'esfera (que anomenarem r) i bases respectives B_1, B_2, B_3, B_4 ... Si aquests «quasi cons» són prou petits, podrem aproximar el seu volum pel volum d'un con i així podrem escriure:

$$Volum\ de\ l'esfera \approx \frac{1}{3}rB_1 + \frac{1}{3}rB_2 + \frac{1}{3}rB_3 + \frac{1}{3}rB_4 + \cdots$$

Traient factor comú, tindrem:

$$Volum\ de\ l'esfera \approx \frac{1}{3}r(B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + \cdots)$$

Quan hi hagi molts «quasi cons», seran molt petits i pràcticament seran cons, de manera que l'aproximació anterior es convertirà en una igualtat (observeu que aquí passem al límit). Per altra banda, la suma de les bases de tots els cons serà la superfície de l'esfera $S,$ de manera que $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + \cdots = S$. Així, tindrem que:

$$Volum\ de\ l'esfera = \frac{1}{3}rS$$

Però recordem que el volum d'una esfera és $\frac{4}{3}\pi r^3$. Per tant:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}rS$$

Simplificant, obtenim l'expressió de la superfície d'una esfera:

$$S = 4\pi r^2$$

I amb aquest resultat tan bonic, deduït de manera intuïtiva, arribem al final del nostre camí pel territori de les figures rodones!

Continguts més rellevants que es tracten

Figures rodones (circumferència, cercle, cilindre, con, esfera) i els seus elements. Longitud d’una circumferència, àrea d’un cercle, volum d’un cilindre, volum d’un con, volum d’una esfera i àrea d’una esfera. Expressions algebraiques. Raonament i intuïció geomètrica.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment

Aquest sender pot contribuir a desenvolupar especialment la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques). Algunes de les experiències que proposa també posen en joc la competència 8 de la dimensió de connexions (Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes).

Comentaris i referències

Observeu que el raonament del tram 6 és molt semblant al fet en el tram 2, però a la inversa: en el tram 2 es passa de la longitud a l’àrea (de dimensió 1 a dimensió 2), en el tram 6 es passa del volum a l’àrea (de dimensió 3 a dimensió 2). Tanmateix, existeix una interessant simetria argumental.

Atès que aquest material està adreçat al professorat, en les descripcions d’alguns trams s’ha emprat un nivell de notació matemàtica que a classe, segons el grup, potser convindria moderar. En el cas contrari, si els alumnes no presenten dificultats per seguir-lo, i sempre sense forçar la situació, es podrà introduir en algun dels trams (tan sols com un apunt) la idea de sumatori, que passant al límit, donaria lloc a la integral, que es treballarà al batxillerat.

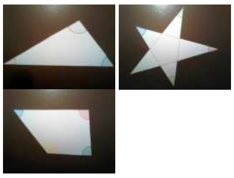
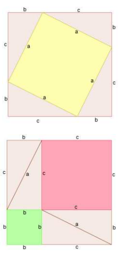
El camí que s’ha descrit no està pensat per fer-se tot seguit, sinó per estendre’s al llarg de tota l’ESO. Així, mentre que el tram 1 és adequat per a primer curs, els trams 5 i 6 ho són per a quart curs. En tot cas, la proposta planteja una manera conjunta d’abordar longituds, àrees i volums de figures rodones basada en l’experimentació i el raonament plausible. Quan la demostració rigorosa no és possible, aquest plantejament més intuïtiu és l’única alternativa a la simple memorització.

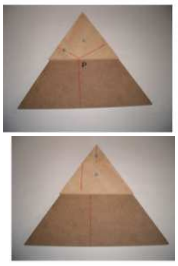
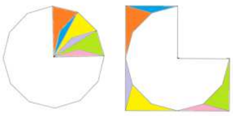
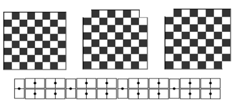
EXEMPLES D’ACTIVITATS

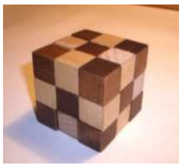
En el quadre següent es presenta una mostra d’activitats d’experimentació per desenvolupar en el bloc d’espai i forma. En el cas d’activitats que siguin especialment il·lustratives de les fases que abans s’han descrit (experimentació, descoberta, conceptuació i demostració o formalització, si cal), aquest fet s’indicarà en negreta dins de la columna de presentació de l’activitat. Aquestes activitats es poden trobar desenvolupades a la pàgina <*www.xtec.cat/web/curriculum/eso/orientacionsgeometria*>.

Les activitats següents pertanyen al bloc d’espai i forma

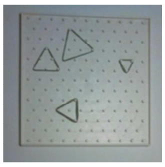
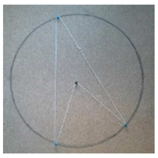
Propostes ampliades

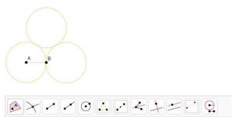
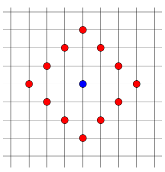
Activitat	Presentació
Un sender de gran recorregut per les figures rodones 	El sender d'aquesta proposta travessa el territori de les figures rodones tot presentant materials i raonaments per anar assolint, tram a tram, els diversos conceptes (longitud d'una circumferència, àrea d'un cercle, volum d'un cilindre, volum d'un con, volum d'una esfera, àrea d'una esfera, etc.). A la pràctica no es faran tots els trams seguits sinó que s'estendran al llarg de tota l'ESO, tanmateix pot ser bo imaginar-ho com un camí encadenat per visualitzar clarament com van encaixant els diferents trams.
Sumem angles 	Aquesta activitat proposa un procés d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració** per determinar el valor de la suma d'angles d'un triangle, d'un quadrilàter i d'una estrella de cinc puntes. En cada cas es proposa experimentar tant retallant la figura en paper com fent les construccions amb GeoGebra.
Miralls i simetries 	Els miralls són un recurs ple d'oportunitats didàctiques per treballar la simetria. Ofereixen experiències en general motivadores i atractives visualment que poden ser molt útils per provocar el raonament geomètric o enriquir-lo.
Relacions mètriques en triangles rectangles (1): teorema de Pitàgores 	El treball entorn del teorema de Pitàgores és molt comú a l'ensenyament secundari. Tanmateix, la proposta que es presenta té la particularitat de plantejar-ho seguint un procés en quatre etapes: **experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**. Això permet que l'alumne visqui en primera persona *la construcció del teorema* i que la seva comprensió sigui clara i rica.

Relacions mètriques en triangles rectangles (2): teoremes de l'altura i del catet 	Els teoremes de l'altura i del catet expressen tres relacions mètriques en triangles rectangles que són fàcils pel que fa a les idees que posen en joc i interessants especialment per la seva aplicació en la trigonometria.
Descobrim el teorema de Viviani 	El teorema de Viviani no està entre els continguts que es tracten en l'educació matemàtica, malgrat expressar un resultat ben sorprenent que posa en joc elements senzills d'un triangle equilàter. Tanmateix, té un innegable interès educatiu, ja que ofereix una excel·lent oportunitat perquè els alumnes facin un procés geomètricament ric d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**, manejant idees que es troben àmpliament al seu abast.
El secret del dodecàgon regular 	Malgrat que és una figura de fàcil construcció, hem de reconèixer que el dodecàgon regular ha estat poc present a les classes de geometria. En aquesta activitat, seguint un procés d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**, intentarem trobar la sorprenent expressió de la seva àrea en funció del radi del cercle circumscrit.
Fotografia matemàtica 	El professor Santi Vilches afirma que «la fotografia matemàtica és una eina didàctica». Efectivament, és una activitat molt potent per educar la mirada matemàtica dels alumnes i per contribuir al fet que vegin la matemàtica que els envolta. És especialment rellevant per posar en joc continguts geomètrics gràcies al seu clar aspecte visual i al fet que la geometria és la part de les matemàtiques que té una presència més directa i evident en el nostre entorn quotidià.
Enrajolem un taulell d'escacs amb dominós 	Les demostracions de no-existència no són gens comunes en l'educació matemàtica a secundària i, encara menys, en l'àmbit de la geometria. Aquesta activitat ens apropa a una d'aquestes demostracions per mitjà d'un raonament geomètric fàcil, accessible a tot l'alumnat. Es parteix d'un procés d'experimentació amb materials que, de mica en mica, va conduint a descobrir la impossibilitat de l'enrajolament i a poder argumentar-ne les raons.

El camí del tèrmit 	Hi ha materials manipulables que serveixen per treballar la resolució de problemes: alguns poden ser la base per plantejar un problema, altres poden ajudar a la seva comprensió i resolució. Cal esmentar la potència que pot tenir l'ús d'un recurs manipulable per enfocar i resoldre un problema.

Propostes curtes

Activitat	Presentació
Geoplans i geoespais 	Els geoplans quadrangulars, els isomètrics, permeten moltes activitats: mesura de perímetres de figures, divisió de figures en parts que tinguin la mateixa àrea, entorn de triangles, etc. El geoespai és un recurs perfecte per mostrar posicions relatives de rectes a l'espai i superfícies reglades.
Formes que fan pensar: trencaclosques, tangrams, pentòminos i hexòminos 	L'art de partir figures en trossos i reordenar-los per obtenir altres figures pot ser apassionant. Així, els diferents tipus de tangrams i els nombrosos i elegants trencaclosques geomètrics d'autors com Henry E. Dudenay, Sam Loyd o Martin Gardner han ofert delicioses hores de repte i reflexió a moltes persones. Aquests materials també són útils a l'escola.
Relació entre un angle inscrit en una circumferència i l'angle central comprès 	Disposarem d'una placa de suro sobre la qual hi ha dibuixada una circumferència, d'un fil elàstic nuat i de quatre xinxetes, tal com mostra la imatge de l'esquerra. Amb els alumnes ens preguntem si hi haurà alguna relació entre l'angle inscrit i el central. Podem fer mesures emprant un semicercle graduat i descobrirem que l'angle inscrit és la meitat del central. També es poden fer comprovacions amb altres materials. Hem fet una descoberta que convé deixar ben escrita!

Quan les isometries es fan art: mosaics, sanefes i rosasses 	Els mosaics, les sanefes i les rosasses ofereixen excel·lents oportunitats per treballar a classe les translacions, les simetries i les rotacions. En aquestes figures la geometria, a través de la repetició d'un mateix motiu, esdevé una eina per crear bellesa. L'exploració de l'entramat geomètric que s'amaga darrere d'aquestes formes és una font d'activitats pràctiques per a la classe.
Geometria dinàmica: GeoGebra	En aquest recull de possibilitats de treball en geometria és imprescindible citar el GeoGebra, un programa de geometria dinàmica creat per Markus Hohenwarter, àgil i intuïtiu, que pot ser un recurs molt potent a classe de geometria i d'altres parts de la matemàtica. És un espai d'experimentació, de descoberta, de comprensió, de raonament, de demostració, que pot canviar profundament l'educació geomètrica.
Un poema de construccions geomètriques: *Euclid: The Game* 	*Euclid: The Game* és una mena de joc creat per Kasper Peulen sobre la versió de GeoGebra en línia, que consisteix en el plantejament successiu de construccions gràfiques amb regle i compàs. S'inicia amb un menú d'eines molt petit i cal anar passant nivells, fent les construccions que es proposen. Tot un poema geomètric que es troba a l'enllaç <*http://euclidthegame.com/*>.
Construcció i exploració de políedres 	Hi ha molts materials que permeten construir políedres fàcilment, mitjançant les cares o mitjançant les arestes. A part de materials comercials, també es poden construir políedres amb làmines de plàstic transparent unides amb cinta adhesiva, amb barretes de plàstic, etc. Algunes activitats permeten treballar el pas de l'espai al pla o el pas invers, del pla a l'espai: deduir el políedre a partir de les seves vistes o de seqüències de seccions.
Camins per una quadrícula: la geometria del taxista 	L'Eixample de Barcelona està format per una quadrícula de carrers que es tallen perpendicularment. En aquest espai no és possible anar d'un punt a un altre en línia recta, ja que es travessarien blocs de cases, de manera que la geometria de l'Eixample respon a unes regles que no són les de la geometria d'Euclides i que donen lloc a l'anomenada *geometria del taxista* o *taxigeometria*. Així, ens endinsem en una geometria diferent de l'euclidiana que té un fonament senzill i sòlid (de fet la *taxidistància* correspon a la norma L_1) i que permet raonaments tant formatius en les idees que posen en joc com sorprenents en els resultats.

ALGUNES ACTIVITATS DE CARÀCTER GEOMÈTRIC EN EL BLOC DE NUMERACIÓ I CÀLCUL

OBSERVACIONS GENERALS

El bloc de numeració i càlcul molt sovint és el bloc de continguts curriculars al qual es dedica més temps de classe en detriment especialment del bloc d'espai i forma. Assegurar una bona comprensió dels conceptes referents a la numeració i un cert nivell de destresa en els procediments de càlcul és important per poder abordar bé altres continguts matemàtics. Tanmateix, aquest argument no hauria de retenir-nos, més enllà d'un temps prudencial, en el bloc de numeració i càlcul. Una excessiva inversió de classes en aquest bloc pot comprometre, per manca de temps, un bon treball en altres blocs. L'experiència demostra que els beneficis d'un allargament en el treball sobre procediments de càlcul no sempre compensen els consegüents desavantatges de la manca de possibilitats de dedicació a altres blocs no pas menys importants.

Seria bo introduir aspectes geomètrics dins del bloc de numeració i càlcul

La introducció d'aspectes geomètrics en el treball dins de numeració i càlcul no tan sols pot beneficiar l'assoliment de coneixement geomètric sinó que també pot contribuir molt a una millor comprensió dels continguts aritmètics, aportant-hi visualització, interpretació gràfica i aplicació concreta. Aquesta no és una idea més o menys nouvinguda, ben al contrari, la història de la matemàtica és plena de trobades entre l'aritmètica i la geometria: des dels nombres figurats (triangulars, quadrats, pentagonals, piramidals, etc.) dels pitagòrics fins a l'expressió gràfica de fraccions com a parts d'una àrea; des de la construcció d'irracionals del tipus $\sqrt{n}$ amb regle i compàs o amb programes de geometria dinàmica (a través dels teoremes de Pitàgores o d'altura) fins a l'origen geomètric d'alguns irracionals transcendents com el nombre π (relació entre longitud i diàmetre en una circumferència) i el nombre φ (que expressa la relació àuria, cànon de bellesa, present en determinats rectangles i en els pentàgons, per exemple); des de la demostració gràfica de resultats numèrics (per exemple: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$) fins al sentit geomètric d'algunes operacions aritmètiques; etcètera. També hauríem de posar de manifest aquests enllaços a les classes del bloc de numeració i càlcul aprofitant oportunitats com les citades i moltes d'altres. No tan sols reforçaríem així el treball geomètric, sinó que milloraríem la comprensió de les idees aritmètiques.

Aquests enllaços són un territori idoni per treballar la competència 9 de la dimensió de comunicació i representació (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic). La ubicació dels nombres sobre la recta numèrica o el significat d'un quadrat com una àrea i d'un cub com un volum són excel·lents exemples d'aquesta diversitat de representacions que enriqueix la comprensió.

El mateix Henri Poincaré (1854-1912), un dels pares de la matemàtica actual, posa en valor les representacions en el camp de l'ensenyament del càlcul quan afirma: «Tan sols hi ha dos mètodes per ensenyar fraccions: tallar, encara que sigui mentalment, un pastís o fer-ho amb una poma. Amb qualsevol altre mètode d'ensenyament, els escolars prefereixen sumar numeradors amb numeradors i denominadors amb denominadors». Poincaré era un defensor de la intuïció com a força creadora d'idees matemàtiques. Una comprensió més intuïtiva (visual, gràfica, geomètrica, etc.) de les idees aritmètiques podria contribuir a evitar aquella prematura mecanització dels procediments de càlcul que, massa sovint, acaben sent pures receptes i perden la seva base conceptual.

La incorporació d'aspectes geomètrics en el bloc de numeració i càlcul pot respondre a diverses intencionalitats didàctiques com les següents:

- Per introduir idees. Un exemple: la representació de fraccions unitàries com a longituds de barretes (de la meitat de la unitat, d'un terç, d'una quarta part, etc.) és un excel·lent procediment per introduir la necessitat de calcular el comú denominador en la suma i la resta de fraccions.

- Per visualitzar magnituds i relacions concretes. Un exemple: la representació de fraccions com a parts d'una figura (un cercle, un rectangle, un quadrat, etc.) ajuda molt a la comprensió de determinats problemes aritmètics.

- Per aplicar procediments de càlcul. Els problemes de geometria molt sovint tracten dades numèriques (enteres, racionals, irracionals, etc.), el maneig de les quals també és una manera de treballar expressions aritmètiques.

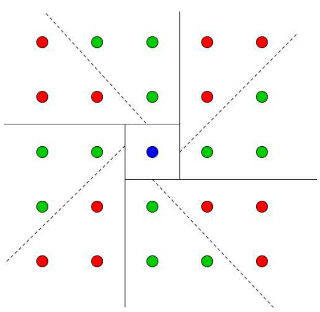
- Per mostrar o demostrar propietats. Els exemples són abundants: des de demostrar que la suma de dos nombres triangulars consecutius és un quadrat perfecte fins a calcular la suma de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, un càlcul que fet per procediments aritmètics depassa els continguts de l'ESO però que, mostrat de manera gràfica, és molt fàcil de comprendre. La força de les representacions geomètriques per introduir, visualitzar, demostrar o aplicar idees aritmètiques es posa de manifest de manera brillant en el llibre *Demostraciones sin palabras* de Roger B. Nelsen i en les excel·lents obres sorgides de la col·laboració entre ell i Claudi Alsina (*Math made visual*, *Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics*; *Icons of Mathematics: An Exploration of Twenty Key Images*; *When Less is More: Visualizing Basic Inequalities*; etc.). Són fonts inesgotables de possibilitats per portar la visualització amb idees geomètriques a les classes de matemàtiques.

Així doncs, hauríem de procurar aprofitar totes les oportunitats possibles per tal de donar presència a la geometria en el treball que fem dins del bloc de numeració i càlcul. Això no tan sols consolidaria coneixements geomètrics, sinó que aportaria més visualització de les idees aritmètiques, milloraria la comprensió dels conceptes i dels procediments de càlcul i establiria valuoses connexions internes. En l'apartat següent es presenta una mostra de diverses activitats que poden enriquir didàcticament el treball dins del bloc de numeració i càlcul i, alhora, permeten posar en joc continguts geomètrics. En alguns casos, les activitats tan sols s'apunten i es referencien. En altres casos, les propostes s'amplien adjuntant presentacions específiques amb diversos apartats: títol, agrupament, material, breu descripció, continguts més rellevants que es tracten, dimensions i competències que es poden treballar especialment.

A continuació, es presenta un exemple detallat d'activitat en aquest bloc de continguts.

PROPOSTA D'ACTIVITAT

Nombres figurats



Agrupament

Malgrat que es pot optar per una presentació més directa, una molt bona manera de treballar amb nombres figurats i les seves propietats consisteix que els mateixos alumnes manipulin fitxetes o cubs encaixables o les dibuixin sobre trames ortogonals o isomètriques en paper. Seria bo de fer aquestes exploracions en parelles per promoure la comunicació d'idees i petites descobertes.

Material

Trames ortogonals o isomètriques dibuixades en paper, petites fitxes, cubs encaixables...

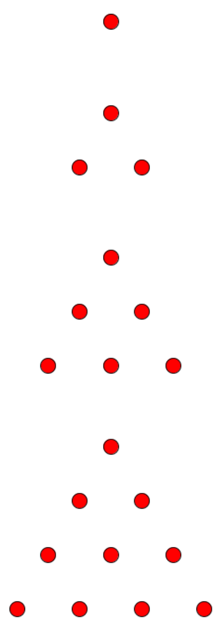
Descripció

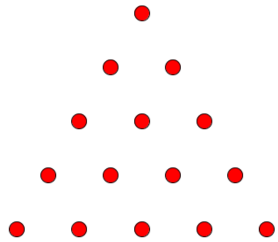
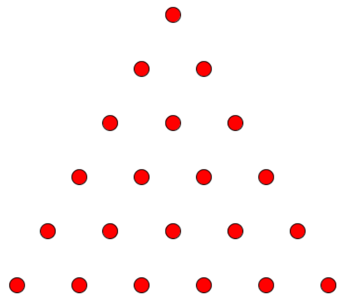
Els nombres figurats són nombres que poden ser representants per un conjunt de punts equidistants entre ells situats seguint un patró geomètric. Així, hi ha nombres triangulars, nombres quadrats (potser són els més coneguts), nombres pentagonals, nombres hexagonals, etc. Fins i tot poden seguir patrons tridimensionals (com el cas dels nombres cúbics o dels nombres piramidals).

Els nombres figurats ja els van introduir els pitagòrics, que donaven al nombre un significat místic. En particular, cal destacar el nombre 10 (quart dels nombres triangulars), al qual atorgaven una importància especial pel fet que és el resultat de sumar els quatre primers nombres naturals: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Filolau (deixeble de Pitàgores, nascut a Crotona) diu que «la "dècada" és gran, totpoderosa i generadora de tot, inici i guia tant de la vida divina com de la terrestre».

La figura següent mostra els sis primers nombres triangulars:

Nombre triangular	Figura
1	
3	
6	
10	



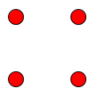
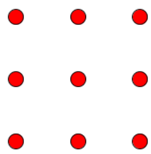
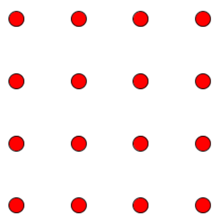
15	
21	

Si n indica l’ordre del nombre triangular, la seva expressió algebraica és:

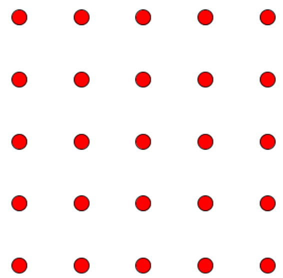
$$T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

La comprovació d’aquesta fórmula ja és una bona activitat de classe (per anar enfocant les successions) i, en els cursos més avançats, es pot fer la seva deducció a partir de la suma de la progressió aritmètica $1+2+3+4+\cdots+n$. Probablement a classe serà interessant recordar la història atribuïda a Gauss quan el seu mestre li va demanar de sumar tots els nombres naturals de l’1 al 100. La seva tècnica de suma il·lustra molt bé la demostració de la fórmula anterior.

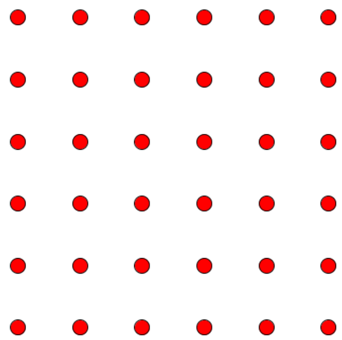
La figura següent mostra els sis primers nombres quadrats:

Nombre quadrat	Figura
1	
4	
9	
16	

25



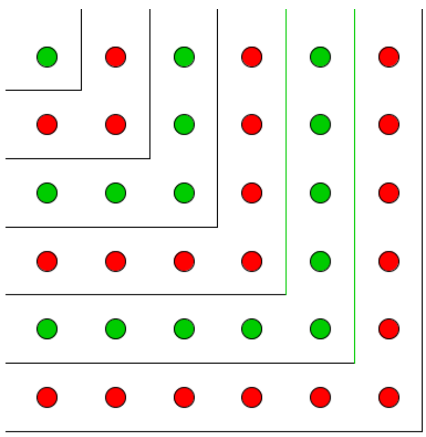
36



Naturalment, si n indica l'ordre del nombre quadrat, la seva expressió algebraica serà $\mathrm{Q_n} = n^2$.

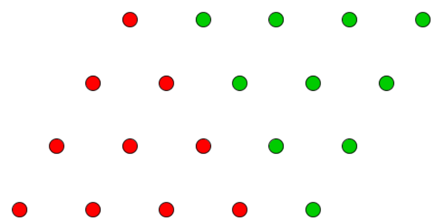
El fet que aquests nombres puguin ser representats per figures geomètriques permet deduir gràficament, de manera força senzilla, propietats aritmètiques interessants. A continuació se'n presenten diverses que es poden portar a classe. En cada cas es mostra la imatge i l'expressió algebraica general, tanmateix amb els alumnes serà interessant anar deduint l'expressió algebraica a partir de la imatge.

Suma de nombres imparells consecutius a partir de l'1:



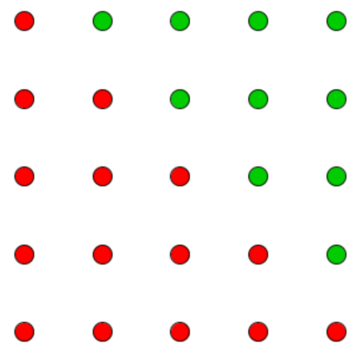
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

El doble d'un nombre triangular:



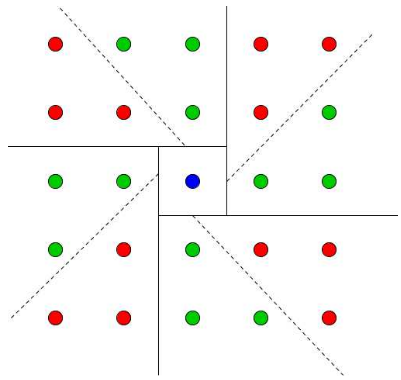
$$2T_n = n(n+1)$$

Suma de dos nombres triangulars consecutius:



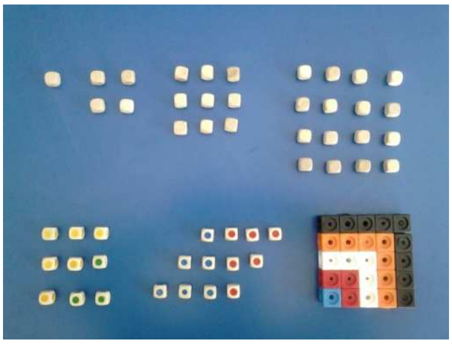
$$T_{n-1} + T_n = n^2$$

Vuit vegades un nombre triangular, augmentat en una unitat, és igual a un nombre quadrat:



$$8T_n + 1 = (2n+1)^2$$

Aquestes propietats i moltes d'altres es poden mostrar, o convidar a descobrir, fent construccions amb fitxes o cubs encaixables com les que es mostren en la imatge següent:



Continguts més rellevants que es tracten

Numeració. Pitàgores com a personatge històric i l'escola pitagòrica. Nombres triangulars. Nombres quadrats. Diverses propietats aritmètiques demostrades amb nombres figurats.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment

Aquest conjunt d'activitats són exemples clars del treball entorn de la competència 7 de la dimensió de connexions (Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar) i la competència 9 de la dimensió de comunicació i representació (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic). Es veu molt clar com la representació gràfica d'un nombre permet fer deduccions matemàtiques.

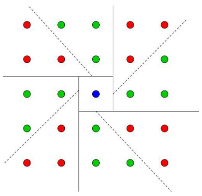
Comentaris i referències

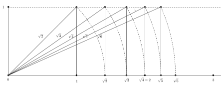
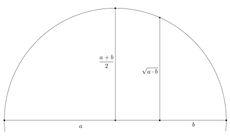
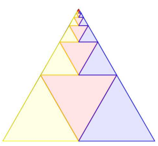
És molt interessant observar com els nombres, a través de les figures que els representen, adquireixen una evidència visual que quasi fa que es puguin tocar. Aquesta visualització els dóna una vida sensorial que té una enorme potència didàctica, una mostra de la qual són les propietats aritmètiques que se'n poden deduir.

EXEMPLES D'ACTIVITATS

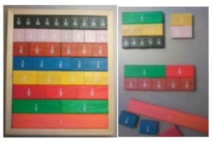
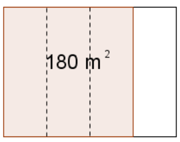
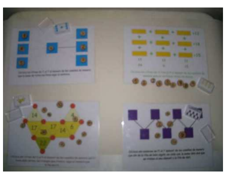
En el quadre següent es presenta una mostra de diverses activitats que poden enriquir didàcticament el treball dins del bloc de numeració i càlcul i, alhora, permeten posar en joc continguts geomètrics. Aquestes activitats es poden trobar desenvolupades a la pàgina <*www.xtec.cat/web/curriculum/eso/orientacionsgeometria*>.

Propostes ampliades

Activitat	Presentació
Nombres figurats 	Els nombres figurats són nombres que poden ser representats per un conjunt de punts equidistants entre ells situats seguint un patró geomètric. Així, hi ha nombres triangulars, nombres quadrats (potser són els més coneguts), nombres pentagonals, nombres hexagonals, etc. Fins i tot poden seguir patrons tridimensionals (com el cas dels nombres cúbics o dels nombres piramidals).

Representació de fraccions: sectors circulars o altres figures geomètriques 	La idea de fracció, desenvolupada al final de l'educació primària i en els primers cursos de l'ESO, es veu molt afavorida per l'ús de representacions gràfiques com a parts de figures geomètriques. Novament, aquí l'aritmètica i la geometria tenen un punt de confluència que les enriqueix mútuament.
Construcció gràfica de nombres racionals i de nombres irracionals del tipus $\sqrt{n}$ 	Quan se situen els nombres sobre la recta real és natural que sorgeixi la dificultat d'ubicar exactament aquells que tenen infinits decimals: mai no acabaríem de posar el nombre en la seva posició correcta! Aquest és el cas, per exemple, dels nombres racionals periòdics i dels nombres irracionals del tipus $\sqrt{n}$.
La irracionalitat de $\sqrt{2}$ i un mosaic molt especial 	L'escola pitagòrica ja es plantejava el problema de la incommensurabilitat de magnituds prenent una unitat concreta. Així, per exemple, $\sqrt{2}$ no es podrà mesurar prenent com a unitat 1. Això vol dir que no existeixen dos nombres enters a i b tals que $a\sqrt{2} = b$.
Comparació gràfica de la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica 	Aquesta és una proposta tan concreta com interessant des del punt de vista geomètric. Els alumnes han de conèixer el teorema de l'altura i els conceptes de mitjana aritmètica i de mitjana geomètrica de dos nombres, per tant serà adequada per a l'últim tram de l'ESO o per al primer curs del batxillerat.
Suma de sèries geomètriques 	Aquest és un exemple molt significatiu d'un tema aparentment complicat que, emprant recursos visuals i propietats geomètriques, es pot tractar sense grans dificultats en els darrers cursos de l'ESO. Sovint, els nostres alumnes tenen la idea prèvia que sumant infinits nombres positius el resultat que s'obté és tan gran com es vulgui. És bonic descobrir que no és així endinsant-se una mica en el camp de les sumes infinites i, en particular, de determinades sèries geomètriques.

Propostes curtes

Activitat	Presentació
La geometria de la recta numèrica 	La distribució dels nombres reals sobre una recta ja representa una connexió clara amb la geometria. L'ordenació de nombres i el seu comportament respecte del canvi de signe, la intercalació de nombres racionals i de nombres irracionals, la seva densitat, els intervals i les semirectes, etc., són idees aritmètiques que sobre la recta real prenen formes geomètriques que ajuden a comprendre-les.
Visualització d'idees i propietats aritmètiques: els reglets numèrics 	Sovint sembla que l'ús dels reglets està circumscrit únicament a l'educació primària. Si bé és en aquesta etapa on poden ser més útils, també poden ser adequats per contribuir a visualitzar determinats continguts de l'ESO. Aquests reglets permeten donar sentit geomètric a operacions i propietats aritmètiques. A l'ARC s'hi poden trobar propostes molt interessants de treball a l'aula amb aquests materials.
Fraccions unitàries amb barretes 	Es tracta d'un material molt senzill que fins i tot el pot construir el mateix alumnat. Malgrat la seva simplicitat, té moltes possibilitats didàctiques. Aquest material permet treballar la idea de fracció, el concepte de numerador i de denominador, l'ordenació de fraccions, l'equivalència de fraccions, el comú denominador i la suma i la resta de fraccions.
Visualització en problemes de fraccions 	Hi ha determinats problemes de fraccions que admeten raonaments gràfics molt clars i elegants. És bo aprofitar aquestes oportunitats. Un bon exemple pot ser: Tres quartes parts d'un solar mesuren 180 m^2, quan mesura el solar sencer?
Trencaclosques de càlcul mental 	Es tracta d'un conjunt de plantilles, ideades per Ignasi del Blanco, cadascuna de les quals planteja un repte numèric que comporta posar en joc dos tipus d'habilitats matemàtiques: el càlcul mental i les estratègies lògiques.

Propietats numèriques a partir de puzles geomètrics 	Són molt abundants les propietats numèriques que es poden demostrar a partir del maneig de figures geomètriques. En els llibres de Roger B. Nelsen i Claudi Alsina que s'han esmentat anteriorment hi ha molts exemples d'aquests puzles. El Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA, <*http://www.mmaca.cat/index.php*>) té una bona col·lecció de puzles geomètrics amb rerefons aritmètic, com el de la imatge. És molt recomanable fer-hi una visita!

ALGUNES ACTIVITATS DE CARÀCTER GEOMÈTRIC EN EL BLOC DE CANVI I RELACIONS

OBSERVACIONS GENERALS

El bloc curricular de canvi i relacions engloba tant la comprensió dels patrons, les relacions i les funcions, com el maneig d'expressions simbòliques i, per tant, els aspectes de manipulació algebraica que faciliten l'expressió de relacions quantitatives i l'estudi del canvi mitjançant models matemàtics. L'enorme potència dels mètodes algebraics ofereix una eina valuosíssima per a la resolució de problemes, però en el camp de l'educació matemàtica cal reconèixer que sovint pot tapar aspectes significatius de la situació que es tracta i no deixar prou espai per posar en joc altres tipus de raonament matemàtic, potser menys formals però més intuïtius.

És important capacitar l'alumne en el maneig simbòlic, ja que les tècniques algebraiques li oferiran moltes possibilitats de treball matemàtic, tant a l'ESO com en els possibles estudis postobligatoris i, fins i tot, en determinades situacions quotidianes. Tanmateix, s'hauria de procurar que, en la mesura del possible, l'alumne no perdés *el sentit dels símbols i de les expressions algebraiques*, una idea molt suggeridora del professor Abraham Arcavi.

Les tècniques algebraiques ofereixen moltes possibilitats de treball matemàtic

A vegades, davant d'un problema, es construeix molt ràpidament el model algebraic, es manipula (com qui manipula una calculadora) seguint tècniques algebraiques independents del context i, finalment, quan s'obté el resultat, s'interpreta en funció de la situació que el problema planteja. Igual que és important que en els processos de càlcul no es perdi el sentit del que representen les expressions aritmètiques, també sembla important que en el treball sobre models algebraics no es perdi el sentit del que representen els símbols i les expressions que es manipulen. Cal anar educant algunes capacitats en aquest camp, entre les quals es poden assenyalar les següents: valoració, en cada cas, de la conveniència d'emprar models algebraics; disseny d'expressions simbòliques adequades i càlcul algebraic eficient; manteniment al llarg del procés del sentit contextual dels símbols i, fins al punt que es pugui, de les expressions algebraiques; etc. En aquest propòsit de donar tan sentit intuïtiu com sigui possible al treball algebraic ens pot ajudar molt la visualització que ofereix la geometria.

La incorporació d'aspectes geomètrics a les activitats de classe dins del bloc de canvi i relacions ofereix moltes possibilitats:

- Per una banda, el treball amb funcions i amb expressions algebraiques pot tenir el seu origen en situacions geomètriques que són força intuïtives per als alumnes. Alguns exemples d'això són les abundants fórmules emprades en geometria per expressar perímetres, àrees, volums, etc.

- Per l'altra, determinades configuracions geomètriques poden donar sentit a expressions o propietats algebraiques des de la visualització o la manipulació. Així, per exemple, la demostració d'identitats notables mitjançant models geomètrics, manipulant peces i basant-se en la igualtat d'àrees i volums, és molt atractiva per als alumnes i aporta molt de sentit a l'expressió merament simbòlica.

La història de l'àlgebra està plena d'intenses trobades amb la geometria

Aquesta relació de fons entre àlgebra i geometria no ens ha de sorprendre (més aviat ens hauria de sorprendre la seva absència). La història de l'àlgebra, molt especialment en els seus inicis, està plena d'interessants i intenses trobades amb la geometria. En l'escrit, absolutament recomanable, *Stages in the history of algebra with implications for teaching* (Katz, 2007) es posa de manifest aquest fet destacant la presència geomètrica tant en l'origen de certs problemes que actualment anomenaríem algebraics com en els procediments de resolució:

> «Comencem pel començament de l'àlgebra, on sigui que estigui. Sembla que les primeres idees algebraiques —relacionades amb les definicions que varen donar Euler i Maclaurin en el segle XVIII— provenen de Mesopotàmia i sorgiren fa uns 4000 anys. La matemàtica mesopotàmica (sovint anomenada matemàtica babilònica) tenia dues arrels: una eren els problemes de comptabilitat que, des del principi, representaven una part important del sistema burocràtic de les primeres dinasties mesopotàmiques, i la segona era una geometria del "tallar i enganxar" probablement desenvolupada per agrimensors per entendre la divisió del territori. [...]
>
> És principalment a partir d'aquesta geometria de "tallar i enganxar" com va créixer el que nosaltres anomenem àlgebra babilònica. En particular, diverses tauletes babilòniques datades entre el 2000 aC i el 1700 aC contenen extenses llistes del que avui entendríem com a problemes quadràtics, l'objectiu dels quals era determinar magnituds geomètriques com l'amplada o l'altura d'un rectangle. Per aconseguir aquest objectiu els escribes feien un ús a fons de la geometria de "tallar i enganxar" dels agrimensors».

La història de l'àlgebra, especialment en els seus orígens, està plena de referències geomètriques. En citem tres exemples:

- El llibre II dels *Elements* d'Euclides (s. III aC) proposa i soluciona geomètricament problemes que avui no tindríem dubtes que corresponen a l'àmbit de l'àlgebra.

- Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi (s. IX), en la seva obra *Hisab al-jabr w'almuqabala* (d'on prové el nom d'àlgebra), descriu el procés de resolució d'un tipus d'equació lineal i de cinc tipus d'equacions de segon grau amb una incògnita:

$$ax = b$$
$$ax^2 = bx$$
$$ax^2 = b$$
$$ax^2 + bx = c$$
$$ax^2 + bx = cx$$
$$ax^2 = bx + c$$

En alguns casos, es fa una justificació geomètrica dels procediments (sovint completant quadrats) o s'hi veu clar el sentit geomètric que amaguen.

- El mateix Gerolamo Cardano recull raonaments geomètrics per a la resolució d'equacions.

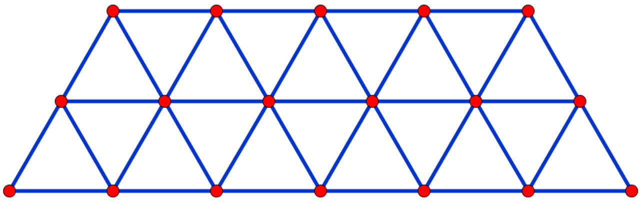
Si els aspectes geomètrics estan presents en l'origen de l'àlgebra, sembla lògic que també hi estiguin en el seu ensenyament.

També el món dels patrons i de les funcions és propici per posar en joc conceptes de geometria.

A continuació, es presenta un exemple detallat d'activitat en aquest bloc de continguts.

PROPOSTA D'ACTIVITAT

Patrons en estructures



Agrupament

És aconsellable fer aquesta activitat per parelles per crear la necessitat de compartir i contrastar arguments en el procés de determinació dels models algebraics que es demanen.

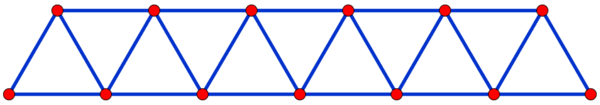
Material

No cal un material especial, llevat de les imatges de les estructures que cal estudiar. Tanmateix també és possible construir efectivament aquestes estructures mitjançant escuradents units per boletes de plastilina o altres materials que permeten fer exploracions geomètriques.

Descripció

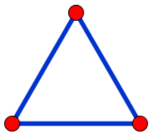
Moltes construccions industrials contenen estructures metàl·liques formades per barres i connectors que els donen solidesa. L'activitat que es proposa bàsicament consisteix a explorar estructures d'aquest tipus i a determinar, en funció d'un paràmetre, el nombre de barres i de connectors necessaris per construir-les. De fet, es tracta de trobar els termes generals a_n, b_n... de successions definides a partir de figures geomètriques en les quals agafarem com a paràmetre n el nombre de barres de la base de l'estructura. Plantejarem cinc casos que corresponen a estructures diferents i prendrem sempre a_n com el nombre de barres necessàries per construir una estructura de n barres de base i b_n com el nombre de connectors necessaris per construir una estructura de n barres de base. Malgrat que les preguntes que es plantegen són les mateixes, té interès proposar l'exploració de diferents tipus d'estructures.

Estructura 1



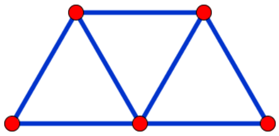
L’estructura de la imatge té 6 barres a la base ($n = 6$) i, per construir-la, necessitem 23 barres ($a_6 = 23$) i 13 connectors ($b_6 = 13$). Podríem trobar una expressió general que doni a_n i b_n per a tots els valors naturals de n? Explorem-ho!

Per a $n = 1$:



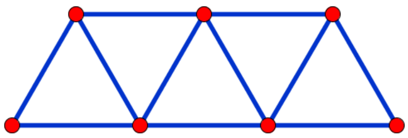
$a_1 = 3$ $b_1 = 3$

Per a $n = 2$:



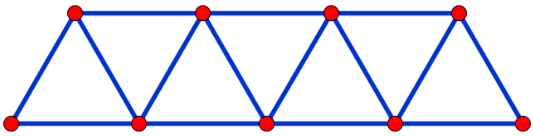
$a_2 = 7$ $b_2 = 5$

Per a $n = 3$:



$a_3 = 11$ $b_3 = 7$

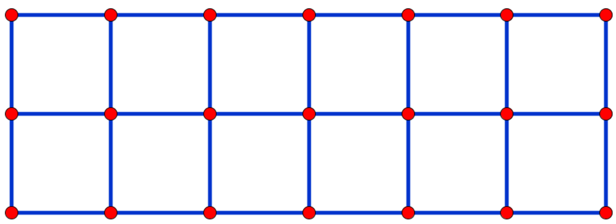
Per a $n = 4$:



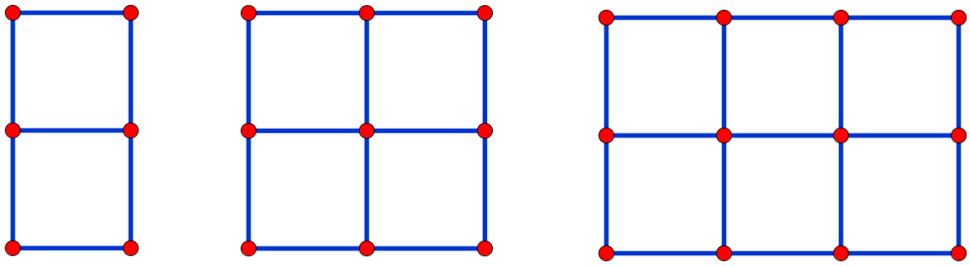
$a_4 = 15$ $b_4 = 9$

Serà bo que els alumnes descobreixen (proposant, argumentant entre ells, cercant contraexemples...) els termes generals d’aquestes successions. De fet, es tracta de dues progressions aritmètiques de diferències respectives 4 i 2, els termes generals de les quals són: $a_n = 4n - 1$ i $b_n = 2n + 1$.

Estructura 2



En aquest cas, novament podem explorar el patró constructiu per a diferents valors de n:

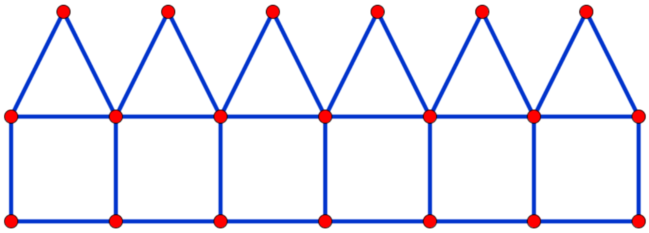


$a_1 = 7$ $b_1 = 6$ $a_2 = 12$ $b_2 = 9$ $a_3 = 17$ $b_3 = 12$

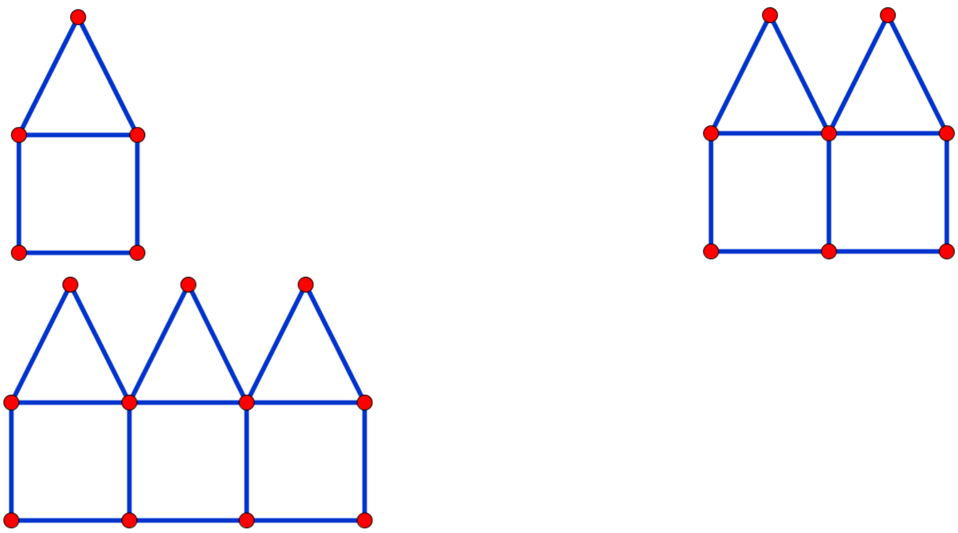
Els alumnes podran deduir els termes generals:

$$a_n = 5n + 2$$
$$b_n = 3n + 3$$

Estructura 3



Explorem el patró constructiu per als primers valors de n:



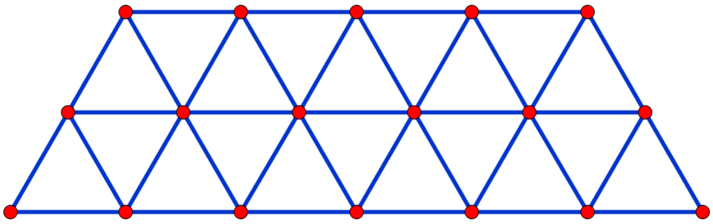
$a_1 = 6$ $b_1 = 5$ $a_2 = 11$ $b_2 = 8$ $a_3 = 16$ $b_3 = 11$

Els alumnes podran deduir els termes generals:

$$a_n = 5n + 1$$
$$b_n = 3n + 2$$

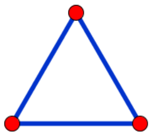
És interessant comparar aquest cas amb l'anterior tot observant com s'afegeix una barra menys i un punt menys a cada pas.

Estructura 4



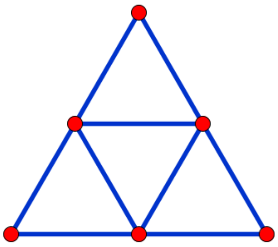
Es tracta d'una estructura una mica més complicada però que pot ser explorada de la mateixa manera:

Per a $n = 1$:



$a_1 = 3 \qquad b_1 = 3$

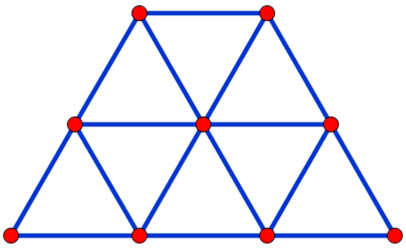
Per a $n = 2$:



$a_2 = 9 \qquad b_2 = 6$

Observem que respecte de la figura anterior hi hem afegit 6 barres i 3 connectors.

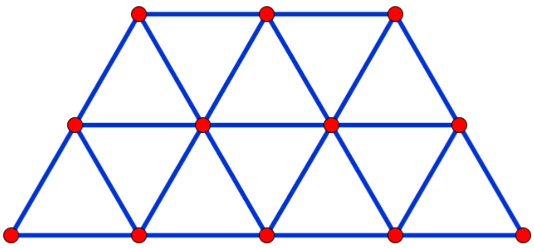
Per a $n = 3$:



$a_3 = 16 \qquad b_3 = 9$

Observem que respecte de la figura anterior hi hem afegit 7 barres i 3 connectors.

Per a $n = 4$:



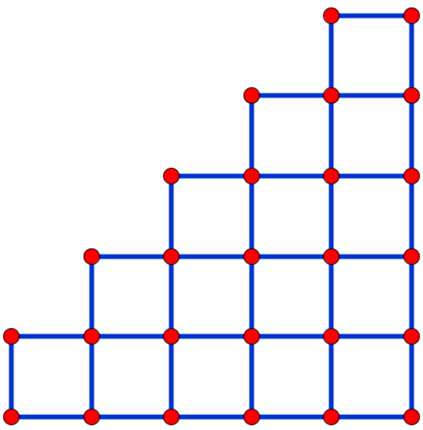
$a_4 = 23 \qquad b_4 = 12$

Probablement els alumnes descobriran aviat que $b_n = 3n$, però tindran una mica de dificultat amb a_n pel fet que a_1 s'escapa del patró. Podem proposar d'escriure-ho així:

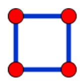
$$a_n = \begin{cases} 3 & per\ \ a\ \ \ n = 1 \\ 7n - 5 & per\ \ a\ \ \ n \geq 2 \end{cases}$$

Estructura 5

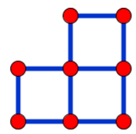
Explorem una nova estructura que suggereix la idea d'una escala o d'unes grades:



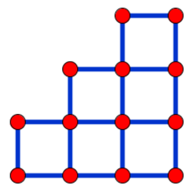
Com en els casos anteriors estudiem els primers valors de n:



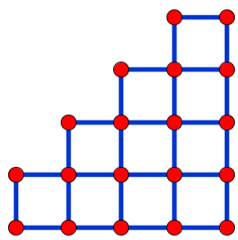
$a_1 = 4$
$b_1 = 4$



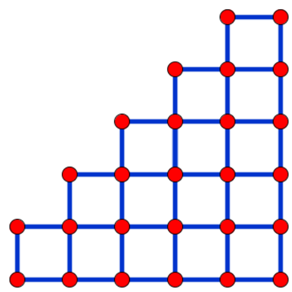
$a_2 = a_1 + 2 \cdot 2 + 2 = 10$
$b_2 = 8$



$a_3 = a_2 + 2 \cdot 3 + 2 = 18$
$b_3 = 13$



$a_4 = a_3 + 2 \cdot 4 + 2 = 28$
$b_4 = 19$



$a_5 = a_4 + 2 \cdot 5 + 2 = 40$
$b_5 = 26$

En primer lloc, abordarem el treball entorn de la successió dels a_n. En aquest cas, la dificultat rau en el fet que les diferències entre termes consecutius no són constants, ja que cada vegada a un terme se li suma un nombre més gran per tal d'obtenir el terme següent! En general:

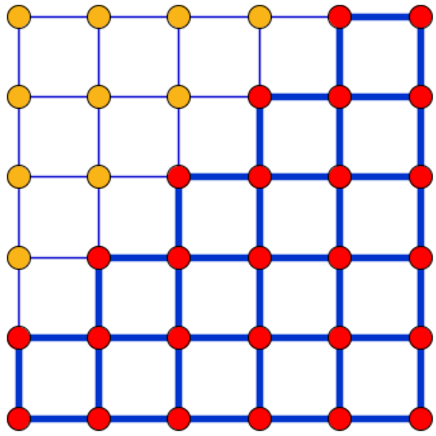
$$a_n = a_{n-1} + 2n + 2$$

Aquesta fórmula es pot deduir gràficament observant la geometria de l'última columna que hi afegim. De totes maneres no és tan senzill deduir l'expressió de a_n únicament en funció del valor de n. Hi ha diferents camins:

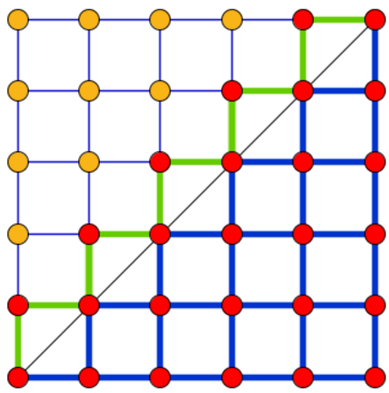
- Un primer camí perquè els alumnes descobreixin l'expressió de a_n hauria de tenir un caràcter inductiu (en el sentit d'anar provant casos concrets), tot convidant els alumnes a experimentar amb expressions diverses en què intervinguessin n^2, n, $2n$, $3n$... Conjuntament aniríem «descobrint» l'art d'ajustar un model algebraic a un conjunt concret de valors. El docent els hauria d'anar acompanyant per encarar la cerca cap a l'expressió correcta:

$$a_n = n^2 + 3n.$$

- Un camí visual, amb fort component geomètric, consisteix a prendre una de les escales i complementar-la fins a donar el quadrat corresponent, tal com es mostra en la figura.



Si la base de l'escala té n barres i hi ha $n + 1$ files de barres horitzontals, resultarà que el nombre total de barres horitzontals del quadrat serà $n(n + 1)$. Per la mateixa raó, el nombre total de barres verticals serà $n(n + 1)$. Així, el nombre total de barres de l'estructura quadrada serà de $2n(n + 1)$. D'entrada, semblaria que la meitat d'aquestes barres, $n(n + 1)$, són les que componen l'estructura de partida en forma d'escala, però si posem atenció en com la diagonal parteix el quadrat, observarem que a aquest nombre de barres cal sumar-hi les que estan pintades de color verd en el dibuix següent:

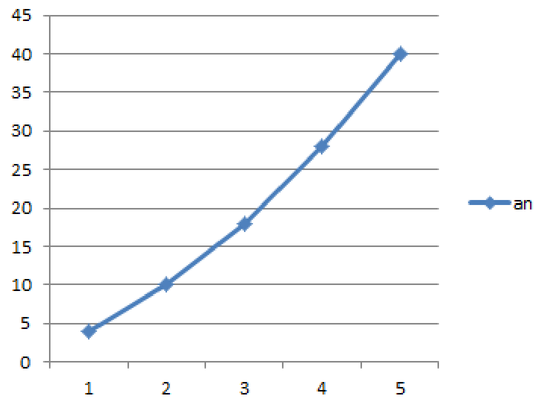


Observem que hi ha n barres horitzontals i n barres verticals acolorides de color verd, això vol dir que a la meitat de les barres del quadrat hi hem de sumar $2n$ noves barres per tenir així el nombre total de barres de l'estructura triangular:

$$a_n = n(n + 1) + 2n = n^2 + 3n.$$

Una bonica demostració geomètrica molt visual!

- Un camí amb un fort component algebraic que no sembla adequat per a l'ESO, però que sí que pot interessar per a alumnes avançats i que s'inclou aquí com un element d'ampliació. Representant en un gràfic els valors obtinguts, observarem que sembla que corresponen a una paràbola:



Això ens porta a pensar que potser els termes a_n seguiran un model quadràtic del tipus $a_n = pn^2 + qn + r$, en què p, q i r s'hauran d'ajustar perquè es compleixi la condició: $a_n = a_{n-1} + 2n + 2$. Simplement substituint tindrem:

$$pn^2 + qn + r = p(n-1)^2 + q(n-1) + r + 2n + 2$$

Eliminant la r i igualant els respectius coeficients de n i els termes independents, obtindrem dues condicions (la igualtat dels coeficients de n^2 no aporta cap condició, ja que és $p = p$), d'on podrem deduir els valors de p i de q:

$$q = -2p + q + 2 \quad \rightarrow \quad p = 1$$
$$r = p - q + r + 2 \quad \rightarrow \quad q = p + 2 \quad \rightarrow \quad q = 3$$

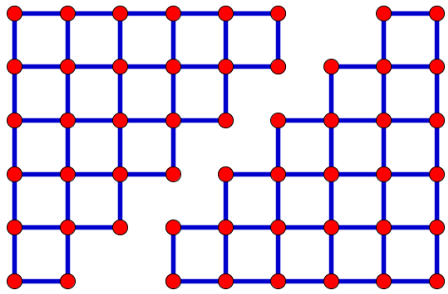
Emprant el fet que $a_1 = 4$, deduirem que $r = 0$. Substituint p, q i r en l'expressió de a_n, obtindrem el model algebraic que s'ajustarà a la successió:

$$a_n = n^2 + 3n.$$

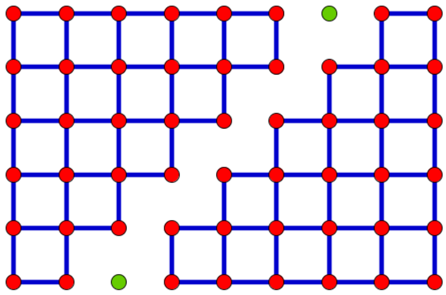
En segon lloc, hem d'emprendre l'estudi de la successió dels b_n. Novament, observem que les diferències entre els termes consecutius no són constants. Els alumnes poden experimentar amb diferents expressions (fins i tot els podem donar pistes), però és difícil que arribin a l'expressió correcta:

$$b_n = \frac{n^2 + 5n + 2}{2}$$

Tanmateix, hi ha una demostració visual molt bonica: considerem una d'aquestes estructures escalades, que suposarem que té n barres a la base (en el cas concret de la imatge, $n = 5$), i prenem una còpia de l'estructura, la girem 180 graus i la desplacem com indica la figura següent:



Si a la figura hi afegim els dos punts verds de la imatge, tindrem un rectangle en l'altura del qual hi haurà $n+1$ punts i en la base del qual hi haurà $n+1+3=n+4$ punts:



Així, el nombre total de punts d'aquest rectangle serà de $(n+1)(n+4)$. Restant d'aquí els dos punts verds i dividint per dos, obtindrem els punts que componen una de les dues peces escalades. Així:

$$b_n = \frac{(n+1)(n+4)-2}{2} = \frac{n^2+5n+2}{2}$$

Vet aquí una sorprenent manera de deduir, amb eines geomètriques ben visuals, l'expressió algebraica que dóna el patró del nombre de connectors de l'estructura en forma d'escala.

Naturalment, es podrien posar més exemples d'estructures per estudiar. Tanmateix, també és interessant convidar els alumnes a inventar noves estructures i descobrir expressions que donin el nombre de barres i de connectors en funció del nombre de barres de la base.

Continguts més rellevants que es tracten

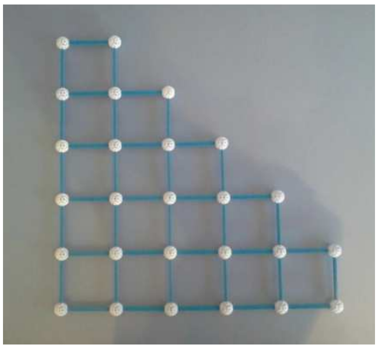
Successions, terme general d'una successió, expressions algebraiques, propietats geomètriques de figures planes, demostracions visuals.

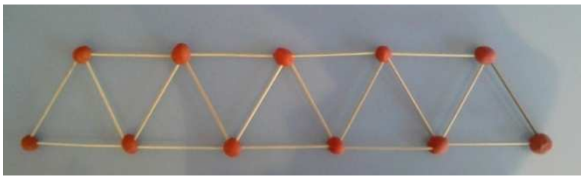
Dimensions i competències que es poden treballar especialment

Amb aquestes activitats es pot treballar especialment la competència 1 de la dimensió de resolució de problemes (Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats). Si es té cura de promoure converses d'aula riques, es contribuirà a desenvolupar la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques) i la competència 11 de la dimensió de comunicació i representació (Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques). En totes aquestes activitats s'utilitza a fons la relació entre expressions algebraiques i geometria, i es treballa així la competència 7 de connexions (Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar) i la 9 de comunicació i representació (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic).

Comentaris i referències

Aquestes activitats conjuguen l'exploració de figures geomètriques amb la determinació de l'expressió algebraica que dóna el terme general de les successions. Tant les estructures de partida com, sovint, el procés per determinar els termes generals posen en joc idees geomètriques que, en alguns casos, poden representar-se no tan sols amb dibuixos sinó també amb materials. Les imatges següents mostren dos exemples en què s'empren materials ben diferents:





Quan els alumnes construeixen aquestes formes o les exploren, van descobrint patrons constructius que després podran emprar per avançar cap a la deducció dels models algebraics que donen els corresponents termes generals.

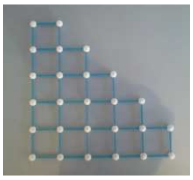
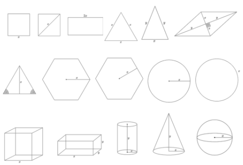
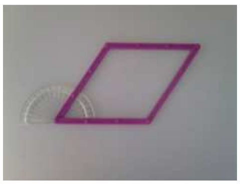
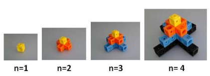
S'ha procurat que les descripcions de les activitats de la proposta accentuïn els aspectes intuïtius que contenen, però també s'ha intentat aportar explícitament la solidesa del rerefons matemàtic que es posa en joc. Aquesta combinació entre intuïció i rigor en la utilització d'eines matemàtiques (que el docent haurà de graduar segons les característiques de l'alumnat concret) atorga una força especial a aquestes propostes, en les quals no és tan important el formalisme com que l'alumne entengui el patró constructiu i el sentit del model algebraic que dóna el terme general buscat. És molt convenient que en l'abordatge d'aquestes propostes es provoquin bones converses entre els alumnes, que conjecturin, argumentin, confirmin o rebutgin hipòtesis.

Aquesta proposta presenta un context geomètric molt ric i obert per treballar expressions algebraiques i models de canvi i relacions. És el desenvolupament d'una idea que, de manera breu, s'apunta en el llibre *Thinking with Mathematical Models. Linear and Inverse Variation*, de Glenda Lappan, Elizabeth Difanis Phillips, James T. Fey i Susan N. Friel (2014).

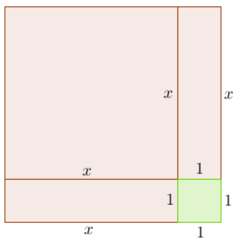
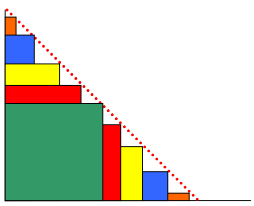
EXEMPLES D'ACTIVITATS

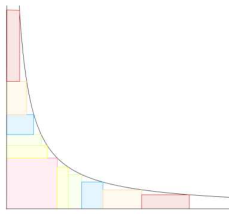
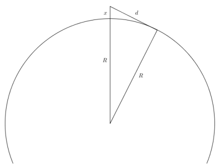
En el quadre següent es presenten alguns exemples de com es poden treballar determinades situacions geomètriques quan es tracten patrons de canvi, relacions funcionals i models simbòlics. Aquestes activitats es poden trobar desenvolupades a la pàgina web següent: <*www.xtec.cat/web/curriculum/eso/orientacionsgeometria*>.

Propostes ampliades

Activitat	Presentació
Patrons en estructures 	Moltes construccions industrials contenen estructures metàl·liques formades per barres i connectors que els donen solidesa. L'activitat que es proposa bàsicament consisteix a explorar estructures d'aquest tipus i determinar, en funció d'un paràmetre, el nombre de barres i de connectors necessaris per construir-les. De fet, es tracta de trobar els termes generals a_n, b_n... de successions definides a partir de figures geomètriques en les quals agafarem com a paràmetre n el nombre de barres de la base de l'estructura.
Expressions algebraiques de relacions geomètriques 	Els elements que componen figures geomètriques ens permeten establir expressions algebraiques que corresponen a models funcionals de relació entre ells. A partir de figures geomètriques en les quals un element (costat, radi, apotema, altura, etc.) està retolat amb una x o amb una y, es planteja el repte de deduir, aplicant coneixements geomètrics, l'expressió algebraica que en funció de x i/o de y donaria el valor d'altres elements de la figura que s'indiquen a l'alumne.
Funcions en un rombe mòbil 	Considerem un rombe articulat en el qual es pot anar variant un angle, fet per exemple amb peces de plàstic (com el material que es mostra en la imatge), amb barres de mecano o simplement amb tires de cartolina unides amb enquadernadors. En funció d'aquesta variació i prenent la longitud del costat com a unitat, ens podem preguntar com varien altres magnituds geomètriques (el perímetre, l'àrea, els altres angles, les diagonals, etc.) i establir l'expressió funcional corresponent.
Patrons i policubs 	Considerem una successió de peces policúbiques com la que es mostra a la figura. Convidem els alumnes a explorar aquestes peces, si pot ser construint-les amb cubs encaixables, i els demanem que, observant una pauta constructiva, estableixin una expressió funcional que doni el nombre de cubs de la peça *n*. Experimentaran, conjecturaran, argumentaran i, possiblement, arribaran a l'expressió demanada per a la qual hi ha una demostració visual esplèndida que alguns alumnes poden descobrir!

Propostes curtes

Activitat	Presentació
Resolució d’equacions des d’una perspectiva històrica 	Tal com s’ha exposat, la història de l’àlgebra està plena de problemes no tan sols plantejats a partir de contextos geomètrics, sinó resolts mitjançant mètodes geomètrics (i això és el que emprarem en aquest cas). Així, la geometria pot actuar com a font i com a camí en el plantejament i la resolució de problemes algebraics. Hi ha diferents procediments de naturalesa geomètrica, com aquest per resoldre equacions. Alguns, per exemple, poden ser molt instructius a classe perquè representen una interpretació visual de la fórmula de resolució d’equacions de segon grau que, a vegades, resulta una mica críptica per als nostres alumnes.
Demostració d’identitats notables mitjançant cossos geomètrics 	Algunes identitats notables poden demostrar-se mitjançant la manipulació de figures geomètriques planes i de cossos tridimensionals. En tots aquests casos, la identitat es demostra a partir de la conservació de l’àrea o del volum quan es parteix d’una figura en diverses parts i després aquestes parts s’agrupen de manera diferent.
Rectangles isoperimètrics i funcions afins i quadràtiques 	L’activitat s’inicia convidant els alumnes a dibuixar i retallar un rectangle que tingui un perímetre determinat, per exemple, 24 cm (convé escollir un nombre amb força divisors). Un cop cada alumne hagi retallat el seu rectangle en cartolina (si pot ser de colors variats), demanarem que superposin tots els rectangles de la manera que indica la figura. Observarem que els seus vèrtexs lliures són punts del gràfic d’una funció afí que dóna l’altura en funció de la base. Serà interessant determinar-ne l’expressió algebraica.

Rectangles equivalents i la funció de proporcionalitat inversa 	Convidarem els alumnes a dibuixar i retallar un rectangle que tingui una àrea determinada, per exemple 36 cm^2 (convé escollir un nombre amb força divisors). Un cop cada alumne hagi retallat el seu rectangle en cartolina (si pot ser de colors variats), demanarem que es col·loquin els rectangles de la manera que indica la figura, tots amb un vèrtex a l'origen i dos costats sobre els eixos de coordenades. Unint els vèrtexs lliures dels diferents rectangles, obtindrem una hipèrbola equilàtera com la corba corresponent al gràfic d'una funció de proporcionalitat inversa.
Distància a l'horitzó en funció de l'altura 	Proposem a l'alumnat una pregunta geomètrica: a quina distància (d) veu l'horitzó un observador situat a una altura x sobre la superfície de la Terra? Es tracta de determinar l'expressió d'una funció que doni aquesta distància d en funció de x. Els alumnes hauran de descobrir una relació que es pot aproximar molt per $d(x) = \sqrt{12{,}7x}$, on x s'expressa en metres i d, en quilòmetres.
Gràfics de funcions d'ompliment d'ampolles 	Es tracta d'una activitat tan rica com bonica, en què la geometria de les ampolles i les idees de volum i d'altura tenen un paper important per generar i estudiar gràfics funcionals. Així posarem en joc, alhora, idees geomètriques i models funcionals.

ALGUNES ACTIVITATS DE CARÀCTER GEOMÈTRIC EN EL BLOC D'ESTADÍSTICA I ATZAR

OBSERVACIONS GENERALS

En el treball dins del bloc d'estadística i atzar es presenten bones oportunitats de tractar continguts geomètrics (revisar-los, consolidar-los, aplicar-los donant-los joc i, fins i tot, introduir-los). Aquesta presència d'idees geomètriques es pot donar de diverses maneres:

- Algunes vegades és tan evident en les activitats estadístiques i probabilístiques que portem a terme que no li traiem tot el profit possible: aspectes geomètrics en la interpretació i generació de diagrames estadístics (barres, sectors, etc.), formes polièdriques de diferents daus, sectors de diversos colors en ruletes, etcètera.

- En altres casos, aquesta presència hi és però està més amagada i ens passa desapercebuda, cosa que ens fa perdre possibilitats ben suggeridores que tenim molt a l'abast: interpretació geomètrica de la mitjana; recompte de camins mínims entre dos punts d'una quadrícula, per exemple l'Eixample de Barcelona; càlcul de la probabilitat que, partint d'un punt i passant per un nombre donat d'encreuaments, arribem a un altre punt a través d'un camí mínim (una pinzellada a la llei binomial); etc.

- I, encara, tenim la possibilitat de proposar treballs d'aula concrets ja pensats per tal que, emmarcats en el camp de l'estadística i l'atzar, permetin treballar idees geomètriques: un bon exemple (que es comentarà àmpliament més endavant) és l'estudi de la probabilitat de no tocar cap línia en llançar una moneda sobre plantilles amb diverses configuracions (línies paral·leles, quadrícules, circumferències...) o algunes tècniques de mostreig per al recompte de persones en una concentració.

Hauríem d'intentar aprofitar aquestes oportunitats i generar-ne de noves per tal d'accentuar la presència de la geometria en el treball que fem a l'aula dins del bloc d'estadística i atzar. Potenciaria la visualització, reforçaria connexions internes, impulsaria metodologies més experimentals i, en definitiva, enriquiria l'aprenentatge tant de la geometria com de l'estadística i l'atzar.

L'any 1777, Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon, en el seu *Essai d'arithmétique morale*, va escriure un paràgraf on ja defensava la geometria com a instrument eficaç en el càlcul de probabilitats. Atesa la seva idoneïtat en el marc del present escrit, reproduïm aquesta bonica cita en el francès original:

> «L'Analyse est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour dans la science des probabilités, pour déterminer et fixer les rapports du hasard; la Géométrie paraissait peu propre à un ouvrage aussi délié; cependant si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnaître que cet avantage de l'Analyse sur la Géométrie est tout à fait accidentel, et que le hasard selon qu'il est modifié et conditionné, se trouve du ressort de la géométrie aussi bien que de celui de l'analyse […]».

En la lliçó inaugural de la Càtedra Lluís Santaló d'Aplicacions de la Matemàtica pronunciada pel professor Agustí Reventós i Tarrida a la Universitat de Girona el dia 16 de març de 2001 s'esmentava aquest paràgraf i es traduïa així:

> «L'anàlisi ha estat l'únic instrument que fins la data d'avui s'ha utilitzat en la ciència de les probabilitats, com si la geometria no fos adequada per a aquests fins, quan en realitat n'hi ha prou amb una mica d'atenció per observar que l'avantatge de l'anàlisi sobre la geometria és tan sols accidental i que l'atzar és tan propi de la geometria com de l'anàlisi».

També s'indicava que el compte de Buffon, en el seu escrit, afegia:

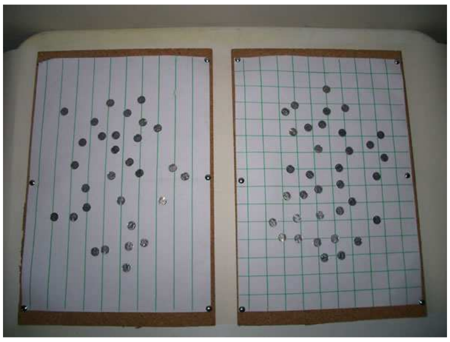
> «Per posar la geometria en possessió dels seus drets sobre la ciència de l'atzar, n'hi haurà prou a inventar jocs que es basin en l'extensió i en les seves relacions».

A continuació, es presenta un exemple detallat d'activitat en aquest bloc de continguts.

La geometria aplicada al bloc d'estadística i atzar impulsaria metodologies més experimentals

PROPOSTA D'ACTIVITAT

Llançament de monedes sobre plantilles: les monedes de Buffon i altres propostes



Agrupament

És aconsellable tirar les monedes en grups de 2 o 3 alumnes i, després, acumular els resultats obtinguts per tots els grups de la classe.

Material

Ens caldrà disposar del material següent:

1. Monedes iguals que no siguin massa grans, 20 o 30 per grup. També poden emprar-se fitxes circulars de les que s'usen en els jocs de taula.

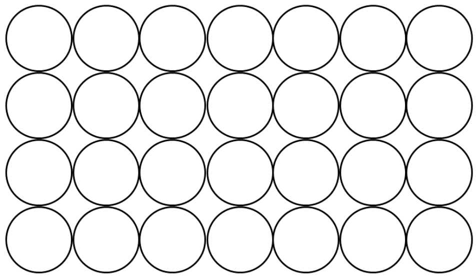
2. Fulls DIN A3 amb plantilles diverses que poden anar enganxades sobre plaques de suro. L'activitat de partida (original de Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon) utilitza les plantilles 2.1 i 2.2, però per plantejar raonaments geomètrics més complexos (però abordables per a l'alumnat d'ESO) es poden emprar altres plantilles com les que es descriuen a 2.3 i 2.4:

    2.1. Full amb rectes paral·leles separades una amplada igual a dues vegades el diàmetre de les monedes (vegeu la imatge inicial).

    2.2. Full amb una quadrícula formada per dues famílies de rectes paral·leles (les d'una família ortogonals a les de l'altra) separades una amplada igual a dues vegades el diàmetre de les monedes (vegeu la imatge inicial).

    2.3. Fulls com els dels models 2.1 i 2.2 però amb una o dues famílies de rectes paral·leles separades una amplada igual a tres (o quatre, o cinc...) vegades el diàmetre de les monedes. Fins i tot les dues famílies de rectes poden estar separades amplades diferents. Aquesta idea d'ampliació, desenvolupada pel grup MatGi de Girona, és molt interessant i dóna molt de joc didàctic, proposant raonaments assequibles i, alhora, originals!

    2.4. Fulls amb un conjunt de circumferències tangents, situades en files i columnes, amb diàmetre igual a dues vegades el diàmetre de les monedes, com mostra la figura següent proposada pel professor Juan Mesa.



Descripció

Com s'ha dit, aquesta activitat es pot fer amb diferents plantilles però sempre respon a la mateixa pregunta, les mateixes intensions didàctiques i el mateix esquema de treball a l'aula.

La **pregunta** és: quina és la probabilitat que, en tirar una moneda sobre aquesta plantilla, no toqui cap línia?

Les **intencions didàctiques** principals són dues:

- Observar com podem aplicar la regla de Laplace a partir de raonaments geomètrics basats en la comparació d'àrees.

- Descobrir la significativa coincidència entre el valor de la probabilitat obtingut com a límit de freqüències relatives i el valor obtingut a partir de la regla de Laplace.

L'**esquema de treball a l'aula** (en grups de 2 o 3 alumnes) podria ser el següent:

- Entrar en el problema. Els alumnes han de tenir clar l'experiment i la pregunta que ens plantegem.

  Per això serà bo tirar algunes monedes sobre la plantilla, tot observant que algunes toquen alguna de les línies i altres no en toquen cap, i proposar que els diferents grups formulin una conjectura de la probabilitat buscada (que no toqui cap línia).

- Emprant la definició de probabilitat a partir de freqüències relatives, calcularem aproximadament la probabilitat que, en tirar una moneda sobre la plantilla, no toqui cap línia. Podem fer-ho amb tres passos:

  Els grups aniran tirant les monedes sobre la plantilla i anotaran la quantitat de monedes que han tirat i quantes no toquen cap línia. Cada cop que se'ls acabin les monedes tornaran a recollir-les i les tiraran de nou. Un cop hagin fet entre 300 i 400 tirades, calcularan la freqüència relativa de no tocar cap de les ratlles.

  Després acumularem el nombre de tirades de tots els grups de la classe i el nombre total de monedes que no toquen cap ratlla i calcularem la freqüència relativa. Ara el nombre de tirades ja serà força gran i aquesta freqüència relativa serà propera a la probabilitat buscada. Naturalment, el valor concret d'aquesta probabilitat dependrà de la plantilla amb què es treballi.

  Podem acabar amb una pregunta: el valor obtingut és proper a la conjectura formulada pels diferents grups?

- Trobar la mateixa probabilitat emprant la regla de Laplace, mitjançant raonaments geomètrics relacionats amb càlcul i comparació d'àrees. Podem fer-ho amb tres passos:

  Sobre la plantilla demanarem que acoloreixin la zona on hauria de caure el centre de la moneda per tal que no arribi a tocar cap de les línies. Aquesta és una operació de caràcter geomètric molt interessant que requerirà l'avaluació de distàncies en la plantilla.

  Prenent una part de la plantilla que sigui una mostra del total, calcularem l'àrea acolorida i l'àrea total. Novament, es tracta d'una acció amb un fort contingut geomètric.

  Farem una interpretació geomètrica del típic «casos favorables partit entre casos possibles» de la regla de Laplace: dividirem l'àrea acolorida (casos favorables que la moneda no toqui cap ratlla) entre l'àrea total de la zona (casos possibles on pot caure el centre de la moneda). El valor obtingut és la probabilitat que es vol calcular. Aquest és el moment en què descobrirem que una relació geomètrica ens permet calcular la probabilitat.

- Observar i gaudir de la meravellosa proximitat entre la probabilitat obtinguda experimentalment i l'obtinguda aplicant la regla de Laplace a partir del raonament geomètric.

Segons la plantilla que s'utilitzi, la resposta a la pregunta plantejada serà diferent. Això convida a anar proposant als alumnes casos progressivament més complicats perquè vagin fent els raonaments geomètrics corresponents. A continuació, s'indica una possible seqüència d'activitats amb les respostes corresponents als diferents casos (naturalment, se'n poden inventar d'altres):

- Plantilla amb rectes paral·leles separades una amplada igual a 2 vegades el diàmetre de les monedes: la probabilitat que, en tirar una moneda sobre aquesta plantilla, no toqui cap línia és de $\frac{1}{2}$.

- Plantilla amb una quadrícula formada per dues famílies de rectes paral·leles separades una amplada igual a 2 vegades el diàmetre de les monedes: la probabilitat que, en tirar una moneda sobre aquesta plantilla, no toqui cap línia és de $\frac{1}{4}$.

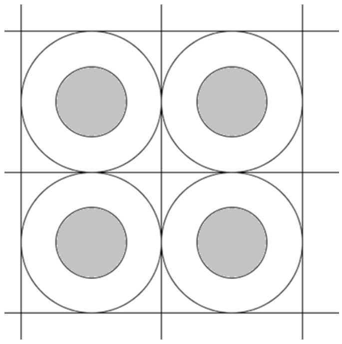
- Plantilla amb rectes paral·leles separades una amplada igual a *n* vegades el diàmetre de les monedes (en què $n > 2$, també vàlid per a $n = 2$ però és un cas ja tractat): la probabilitat que, en tirar una moneda sobre aquesta plantilla, no toqui cap línia és de $\frac{n-1}{n}$.

- Plantilla amb una quadrícula formada per dues famílies de rectes paral·leles separades una amplada igual a *n* vegades el diàmetre de les monedes (en què $n > 2$, també vàlid per a $n = 2$ però és un cas ja tractat): la probabilitat que, en tirar una moneda sobre aquesta plantilla, no toqui cap línia és de $\frac{(n-1)^2}{n^2}$.

- Plantilla amb una quadrícula formada per dues famílies de rectes paral·leles, les rectes d'una de les famílies separades una amplada igual a *n* vegades el diàmetre de les monedes i les rectes de l'altra família separades una amplada igual a *m* vegades el diàmetre de les monedes: la probabilitat que, en tirar una moneda sobre aquesta plantilla, no toqui cap línia és de $\frac{(n-1)\cdot(m-1)}{n\cdot m}$. Observeu que aquest cas generalitza tots els anteriors, fins i tot els corresponents a plantilles amb una sola família de rectes paral·leles (n'hi ha prou a fer el límit quan *m* tendeix a l'infinit!).

- Plantilla amb un conjunt de circumferències tangents, situades en files i columnes, amb diàmetre igual a dues vegades el diàmetre de les monedes: la probabilitat que, en tirar una moneda sobre aquesta plantilla, no toqui cap circumferència és de de $\frac{\pi}{16}$.

  En aquest cas, el raonament geomètric és especialment interessant, ja que cal observar (i deduir amb una aplicació bonica del teorema de Pitàgores) que, en les zones entre quatre circumferències no hi arriba a cabre una moneda sense tocar cap línia. Així, les úniques zones on es podrà situar el centre de la moneda per no tocar cap circumferència seran cercles amb diàmetre igual al de la moneda centrats en cada circumferència (zones ombrejades en la figura que hi ha a continuació).

  Prenent com a peça bàsica de la plantilla un quadrat circumscrit a la circumferència de diàmetre doble que el de les monedes (com en la figura) i anomenant *r* el radi de la moneda, tindrem que, per a cada quadrat d'àrea $16r^2$, l'àrea de la zona on la moneda no toca cap línia és πr^2. Per tant, la probabilitat que en tirar una moneda sobre aquesta plantilla, no toqui cap circumferència és de $\frac{\pi}{16}$.

  L'activitat amb aquesta plantilla té una esplèndida possibilitat final! Amb les plantilles anteriors ja ens haurem sorprès repetidament de la «coincidència» (emprem cometes perquè es tracta d'una aproximació) entre la probabilitat calculada a través del límit de freqüències relatives i la calculada mitjançant la regla de Laplace aplicant procediments geomètrics. En aquest cas, si anomenem *p* el límit de les freqüències relatives de monedes que no toquen cap circumferència, tindrem que $\mathrm{p} = \frac{\pi}{16}$. Havent fet moltes tirades disposarem d'una aproximació força bona de *p*, que podrem anomenar p_{aprox}. Llavors tindrem que $p_{aprox} \approx \pi/16$, de manera que si no coneguéssim el valor de π, el podríem aproximar com a $\pi \approx 16 \cdot p_{aprox}$.

  Hem establert una seqüència didàctica molt bonica que ens ha conduït a obtenir una aproximació de π per un mètode probabilístic. Aquest mètode, en el fons, forma part de la família de procediments anomenats *mètodes de Montecarlo*, que permeten calcular magnituds (normalment àrees) emprant la probabilitat. La implementació numèrica d'aquests mètodes amb ordinador requereix el «llançament» d'un gran nombre de punts (que es realitza mitjançant generadors de nombres aleatoris). En el nostre cas ho hem «implementat» de manera manual mitjançant el llançament de monedes.

- Es podrien emprar plantilles amb la mateixa distribució de circumferències, però amb diàmetres diferents del doble que el de les monedes (per exemple,3 vegades). Aquests casos requeriran una mica més de cura pel fet que, en els espais entre les circumferències, també hi haurà zones en les quals, si hi cau el centre de la moneda, no tocarà cap línia. Un espai obert a alumnat especialment interessat en el tema.

- Un bon complement d'aquesta seqüència d'activitats és l'activitat anomenada *agulla de Buffon* (el nom de la qual és degut al fet que fou plantejada per Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon), que essencialment consisteix en la mateixa idea d'observar la coincidència entre el valor d'una probabilitat obtingut a partir del límit de les freqüències relatives i el valor donat per un procediment «teòric» (en els exemples anteriors, l'aplicació de la regla de Laplace amb arguments geomètrics). En aquest cas, l'experiment consistirà a tirar uns palets (o agulles) de la mateixa llargada sobre una plantilla amb un conjunt de línies paral·leles separades precisament una distància igual a la longitud d'un d'aquests palets i a comptar quants palets toquen alguna de les línies.

Podem calcular, aproximadament, la probabilitat que un palet toqui una línia a partir de la freqüència relativa obtinguda en fer moltes tirades. Així, si acumulant totes les tirades dels alumnes d'una classe, obtenim que s'han fet T tirades de les quals C toquen alguna línia, resultarà que una bona aproximació de la probabilitat que en tirar un palet es toqui una línia és C/T.

Per altra banda, per procediments que sobrepassen àmpliament els continguts de l'educació secundària, pot demostrar-se que la probabilitat exacta que un d'aquests pals caigui tocant una línia és de $2/\pi$. Així doncs, resultarà que $C/T \approx 2/\pi$ i, aïllant π, obtindrem que $\pi \approx 2T/C$. Es tracta d'un nou procediment per obtenir una aproximació de π. Tanmateix, per assolir una bona precisió, caldrà fer molts i molts llançaments.

Novament observem que aquesta activitat té la gràcia de connectar el camp de l'aritmètica (nombre π), amb el camp de la geometria (rectes, posició dels palets) i el camp de la probabilitat (probabilitat que un pal toqui a una ratlla). Tanmateix, té un punt feble important que la fa més artificial que les anteriors: el fet que a l'educació secundària no podem demostrar que la probabilitat «teòrica» és $2/\pi$. Realment, Buffon va demostrar un resultat encara més general: si llancem a l'atzar una agulla de longitud L sobre una superfície ratllada amb línies paral·leles separades per una distància D (més gran o igual que L), la probabilitat que caigui tocant a una línia és de $2L/(\pi D)$.

Continguts més rellevants que es tracten

Proporcionalitat entre àrees, raonament geomètric, definició de la probabilitat a partir de la regla de Laplace, freqüències absolutes i freqüències relatives, definició de la probabilitat a partir de les freqüències relatives, el nombre π.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment

Pel que fa a la dimensió de resolució de problemes, observeu com es treballa especialment la competència 2 (Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes) quan per resoldre un problema de probabilitats s'empren eines geomètriques.

La dimensió de raonament i prova també es treballa fortament a través de la competència 5, construint, expressant i contrastant argumentacions de tipus geomètric per justificar i validar les afirmacions que es fan en el camp de la probabilitat.

Tal com s'ha comentat, la dimensió de connexions està molt present a través de la competència 7 (probablement la més característica d'aquesta activitat): Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques (en aquest cas, entre probabilitats i geometria) per analitzar situacions i per raonar.

La descoberta del fet que el valor de la probabilitat obtingut a partir del límit de freqüències relatives coincideix significativament amb l'obtingut a partir de la regla de Laplace amb raonaments geomètrics, il·lustra especialment la competència 9 (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic) de la dimensió de comunicació i representació.

Comentaris i referències

La part inicial d'aquesta activitat (la que correspon a les plantilles amb una família de rectes paral·leles separades una amplada igual al doble del diàmetre de les monedes i amb una quadrícula formada per dues famílies de rectes paral·leles separades una amplada doble del diàmetre de les monedes) i l'ampliació final tirant palets (o agulles) van ser proposades per Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon, (1707-1788), que és conegut essencialment per la seva obra de naturalista (és autor d'una monumental *Histoire naturelle* en 36 volums), però que també té algunes obres matemàtiques.

En el seu *Essai d'arithmétique morale*, publicat el 1777, és on podem trobar la *Mémoire sur le jeu de franc carreau*, on apareixen, entre d'altres, els dos primers problemes que ens plantegem en aquesta activitat. La part de la present seqüència d'activitats corresponent als materials 2.1 i 2.2 també està descrita a la llicència d'estudis retribuïda «Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària» d'Anton Aubanell, que es pot consultar a <*http://www.xtec.cat/web/innovacio/bdllicencies*>. També està inclosa a l'ARC (Aplicació de Recursos al Currículum). En aquest cas s'adjunta un guió per portar-la a terme a classe i programes en Scratch per fer simulacions (realitzats per Antoni Gomà): <*http://apliense.xtec.cat/arc/node/509*>. L'última part, referent a l'agulla de Buffon, també es pot consultar a l'adreça <*http://www.xtec.cat/~aaubanel/Fitxes/F100.pdf*> i a l'ARC <*http://apliense.xtec.cat/arc/node/1357*>.

Les activitats didàctiques són especialment interessants quan, com en aquest cas, permeten conduir l'alumne per camins d'experimentació que, aparentment sense grans dificultats, s'endinsen en territoris molt potents de la matemàtica obrint, de bat a bat, portes plenes de possibilitats futures (batxillerat, treballs de recerca, estudis superiors, etc.).

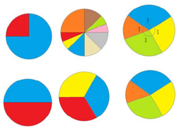
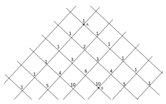
Cal fer notar l'entramat de connexions internes dins de la matemàtica que va teixint aquesta seqüència d'activitats: inicialment calculem la probabilitat (estadística i atzar) a partir d'argumentacions geomètriques relacionades amb el càlcul i la comparació d'àrees (mesura i espai i forma) i, després, aconseguim trobar una estimació del nombre π (numeració i càlcul) per mètodes probabilístics (estadística i atzar). Tot un exemple de treball entorn de la dimensió de connexions i, especialment, de la competència 7.

Aquest tipus de raonament geomètric per establir mesures probabilístiques està a la base de l'anomenada geometria integral, una branca relativament jove de la matemàtica, que va ser impulsada de manera decidida pel matemàtic gironí Lluís Santaló.

EXEMPLES D'ACTIVITATS

En l'apartat següent es presenta una mostra d'activitats que poden enriquir didàcticament el treball dins del bloc d'estadística i atzar i, alhora, permeten posar en joc continguts geomètrics. Aquestes activitats es poden trobar desenvolupades a la pàgina web <*www.xtec.cat/web/curriculum/eso/orientacionsgeometria*>.

Propostes ampliades

Activitat	Presentació
Les monedes de Buffon 	En aquesta activitat, a partir de preguntar quina és la probabilitat que en tirar una moneda sobre la plantilla no toqui cap línia, s’analitzen dues qüestions: l’aplicació de la regla de Laplace a partir de raonaments geomètrics basats en la comparació d’àrees i la relació entre les freqüències relatives i el càlcul de probabilitats.
Daus i ruletes 	La forma dels daus i de les ruletes que tan sovint s’utilitzen a les classes del bloc d’estadística i atzar ofereix una excel·lent oportunitat per treballar continguts geomètrics: reconeixement de cossos geomètrics tridimensionals i els seus desenvolupaments plans, pas de dimensió 2 a dimensió 3, percepció espacial, mesura d’angles, sectors circulars, etc.
Recompte de camins mínims entre dos punts d’una quadrícula 	Les tècniques de recompte són eines importants per a l’estudi de la probabilitat i l’estadística. Una activitat geomètrica interessant en aquest camp és el recompte de camins mínims entre punts d’una quadrícula (per exemple, l’Eixample de Barcelona).

Propostes curtes

Activitat	Presentació
Interpretació i construcció de gràfics estadístics 	L'abundant presència de diagrames estadístics (diagrames de barres, histogrames, diagrames de sectors, pictogrames, etc.) en els mitjans de comunicació, els assenyala com un contingut que cal tractar amb atenció i, alhora, ofereix un material de treball excel·lent per a la classe. Bàsicament es tracta d'aprendre dos aspectes: ▪ Interpretar-los, aprenent a llegir-los, traient tota la informació que contenen, analitzant-los críticament... ▪ Construir-los acuradament.
Interpretació geomètrica de la mitjana i d'altres mesures estadístiques 	*Aprenestadistica* és un espai web de l'Idescat adreçat a estudiants d'educació primària i secundària, amb un conjunt d'activitats per treballar amb dades reals. En aquestes activitats es visualitzen de maneres molt interessants el sentit dels paràmetres estadístics.
Recompte de pedretes i de persones 	«Quantes persones hi ha en la imatge de l'esquerra?». Aquesta és una pregunta que adquireix més importància social quan es tracta d'una manifestació. Es demana que l'estadística ens ajudi a aclarir l'habitual ball de xifres que es produeix! Observem que la qüestió anterior no és gaire diferent de la pregunta: «Quantes pedretes hi ha a la imatge de la dreta?»
Recompte de cigrons, balenes, peixos o esquirols 	La imatge mostra un munt de cigrons i ens suggereix la pregunta següent: «Podríem saber, o estimar aproximadament, quants cigrons hi ha si no els volem comptar un a un?». Aquesta no és una qüestió gaire diferent de preguntar-nos quantes balenes hi ha al Mar del Nord, quants peixos hi ha a l'estany de Banyoles o quants esquirols hi ha en un bosc (en aquests casos és evident la impossibilitat de comptar-los un a un).

QUADRES QUE RELACIONEN LES ACTIVITATS AMB LES COMPETÈNCIES I ELS CONTINGUTS CLAU

Les dimensions, competències i continguts clau considerats en aquest apartat són els establerts al document *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria*, publicat pel Departament d'Ensenyament.

DIMENSIONS I COMPETÈNCIES

Resolució de problemes

C1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.

C2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.

C3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.

C4. Generar preguntes de caràcter matemàtic i plantejar problemes.

Raonament i prova

C5. Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.

C6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.

Connexions

C7. Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.

C8. Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.

Comunicació i representació

C9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.

C10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.

C11. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.

C12. Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

CONTINGUTS CLAU

Numeració i càlcul

CC1. Sentit del nombre i de les operacions: comprensió dels nombres, de les diferents formes de representació i del significat de les operacions.

CC2. Raonament proporcional: comprensió de les fraccions com a raó i com operador; utilització del model matemàtic de la proporcionalitat per representar i comprendre relacions quantitatives.

CC3. Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora): càlcul amb fluïdesa i estimacions raonables.

Canvi i relacions

CC4. Llenguatge i càlcul algebraic: ús dels símbols algebraics per la representació de situacions, estructures matemàtiques i models matemàtics.

CC5. Patrons, relacions i funcions: comprensió i ús de patrons, relacions i funcions.

CC6. Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules: representació i anàlisi de situacions i estructures matemàtiques; ús de models matemàtics per representar i comprendre relacions quantitatives.

CC7. Anàlisi del canvi i tipus de funcions: ús de patrons i funcions per representar i analitzar situacions en les que s'estableixen relacions de canvi entre les variables.

Espai i forma

CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals: ús de la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per resoldre problemes.

CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció: anàlisi de les característiques i propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupament de raonaments sobre relacions geomètriques.

CC10. Relacions i transformacions geomètriques: aplicació de transformacions i ús de la simetria per analitzar situacions matemàtiques.

Mesura

CC11. Magnituds i mesura: comprensió els atributs mesurables dels objectes, i les unitats, sistemes i processos de mesura.

CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures: aplicació de tècniques, instruments i fórmules apropiats per obtenir mesures i fer estimacions raonables.

Estadística i atzar

CC13. Sentit de l'estadística: desenvolupament i avaluació d'inferències i prediccions basades en dades.

CC14. Dades, taules i gràfics estadístics: formulació de preguntes abordables amb dades i recollida, organització i presentació de dades rellevants per respondre-les.

CC15. Mètodes estadístics d'anàlisi de dades: selecció i ús de mètodes estadístics apropiats per analitzar dades.

CC16. Sentit i mesura de la probabilitat: comprensió i aplicació de conceptes bàsics de probabilitat.

QUADRES D'ACTIVITATS PER BLOCS AMB COMPETÈNCIES I CONTINGUTS CLAU

Els quadres de les pàgines següents relacionen les activitats proposades amb les competències que poden contribuir a desenvolupar de manera especial i amb els continguts clau que permeten treballar.

Activitats del bloc de mesura													
Activitat	Competències												Continguts clau
	Resolució de problemes				Raonament i prova		Connexions		Comunicació i representació				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Rectificar, quadrar i cubicar		X						X				X	Magnituds i mesura; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Explorant els ordres de magnitud							X	X	X				Magnituds i mesura; sentit del nombre i de les operacions
Un passeig per l'origen de l'SMD i de l'SI								X			X		Magnituds i mesura; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Mesurem π i mesurem amb π	X	X	X	X			X	X			X		Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Perímetres i àrees, àrees i volums				X	X							X	Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures; anàlisi del canvi i tipus de funcions
Problemes per pensar una mica entorn de la mesura		X	X		X								Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures; figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció
La mesura en el vídeoMAT				X				X	X	X	X	X	Magnituds i mesura; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
La mesura del nostre entorn quotidià		X		X				X					Magnituds i mesura; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Mesura de l'alçària d'un edifici, d'una grua, d'un arbre...	X	X		X		X		X					Magnituds i mesura; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures; raonament proporcional
La semblança i la proporcionalitat		X		X		X		X					Raonament proporcional; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Plànols, mapes i maquetes: la proporcionalitat feta escala		X		X		X		X					Raonament proporcional; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Peus, passos, braços i ales				X		X		X					Magnituds i mesura; sentit de l'estadística; dades, taules i gràfics estadístics
Volums emplenant cossos amb aigua		X		X	X								Magnituds i mesura; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures

Activitats del bloc d'espai i forma													
Activitat	Competències												Continguts clau
	Resolució de problemes				Raona-ment i prova		Conne-xions		Comunicació i representació				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Un sender de gran recorregut pel territori de les figures rodones					X			X					Sentit espacial i representació de figures tridimensionals; figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció
Sumem angles					X						X	X	Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció
Miralls i simetries				X	X								Relacions i transformacions geomètriques
Relacions mètriques en triangles rectangles (1): teorema de Pitàgores					X				X				Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Relacions mètriques en triangles rectangles (2): teoremes de l'altura i del catet					X				X				Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Descobrim el teorema de Viviani				X	X						X	X	Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
El secret del dodecàgon regular					X		X					X	Relacions i transformacions geomètriques; anàlisi del canvi i tipus de funcions
Fotografia matemàtica				X		X		X				X	Sentit espacial i representació de figures tridimensionals
Enrajolem un taulell d'escacs amb dominós			X		X	X				X			Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció
El camí del tèrmit			X		X	X			X				Sentit espacial i representació de figures tridimensionals
Geoplans i geoespais				X	X					X			Sentit espacial i representació de figures tridimensionals; figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció

Formes que fan pensar: trencaclosques, tangrams, pentòminos i hexòminos			X	X	X								Sentit espacial i representació de figures tridimensionals
Relació entre un angle inscrit en una circumferència i l'angle central comprès				X	X								Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció
Quan les isometries es fan art: mosaics, sanefes i rosasses						X		X					Relacions i transformacions geomètriques
Geometria dinàmica: GeoGebra				X	X		X			X		X	Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció; relacions i transformacions geomètriques; llenguatge i càlcul algebraic
Un poema de construccions geomètriques: *Euclid: The Game*		X	X		X							X	Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció
Construcció i exploració de políedres								X	X			X	Sentit espacial i representació de figures tridimensionals
Camins per una quadrícula: la geometria del taxista				X	X			X					Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció

Activitats del bloc de numeració i càlcul													
Activitat	**Competències**												**Continguts clau**
	Resolució de problemes				**Raona-ment i prova**		**Conne-xions**		**Comunicació i representació**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	
Nombres figurats							X		X				Sentit del nombre i de les operacions
Representació de fraccions: sectors circulars o altres figures geomètriques					X		X		X				Sentit del nombre i de les operacions; figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció
Construcció gràfica de nombres racionals i de nombres irracionals del tipus $\sqrt{n}$					X		X		X				Sentit del nombre i de les operacions; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
La irracionalitat de $\sqrt{2}$ i un mosaic molt especial		X		X	X	X	X						Sentit del nombre i de les operacions; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Comparació gràfica de la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica					X		X					X	Sentit del nombre i de les operacions; figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció
Suma de sèries geomètriques				X	X		X		X				Raonament proporcional; sentit espacial i representació de figures tridimensionals
La geometria de la recta numèrica					X		X		X				Sentit del nombre i de les operacions
Visualització d'idees i propietats aritmètiques: els reglets numèrics					X		X		X				Sentit del nombre i de les operacions: sentit espacial i representació de figures tridimensionals
Fraccions unitàries amb barretes							X		X				Sentit del nombre i de les operacions; raonament proporcional
Visualització en problemes de fraccions	X				X		X		X				Sentit del nombre i de les operacions; raonament proporcional
Trencaclosques de càlcul mental			X		X								Càlcul (mental, estimatiu, algorísmic, amb calculadora)
Propietats numèriques a partir de puzles geomètrics							X		X				Sentit del nombre i de les operacions; sentit espacial i representació de figures tridimensionals

Activitats del bloc de canvi i relacions													
Activitat	Competències												Continguts clau
	Resolució de problemes				Raona-ment i prova		Conne-xions		Comunicació i representació				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Patrons en estructures	X				X		X		X		X		Llenguatge i càlcul algebraic; sentit espacial i representació de figures tridimensionals
Expressions algebraiques de relacions geomètriques	X						X						Patrons, relacions i funcions; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Funcions en un rombe mòbil	X						X			X		X	Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Patrons i policubs	X				X		X						Llenguatge i càlcul algebraic; sentit espacial i representació de figures tridimensionals
Resolució d'equacions des d'una perspectiva històrica	X						X		X				Llenguatge i càlcul algebraic; sentit espacial i representació de figures tridimensionals
Demostració d'identitats notables mitjançant cossos geomètrics					X		X		X				Llenguatge i càlcul algebraic; sentit espacial i representació de figures tridimensionals
Rectangles isoperimètrics i funcions afins i quadràtiques							X		X				Anàlisi del canvi i tipus de funcions; figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció
Rectangles equivalents i la funció de proporcionalitat inversa							X		X				Anàlisi del canvi i tipus de funcions; figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció
Distància a l'horitzó en funció de l'altura						X		X					Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules; anàlisi del canvi i tipus de funcions
Gràfics de funcions d'ompliment d'ampolles				X		X		X					Representació de funcions: gràfics, taules i fórmules; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures

Activitats del bloc d'estadística i atzar													
Activitat	**Competències**												**Continguts clau**
	Resolució de problemes				**Raona-ment i prova**		**Conne-xions**		**Comunicació i representació**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	
Les monedes de Buffon		X			X		X		X				Sentit i mesura de la probabilitat; raonament proporcional; relacions mètriques i càlcul de mesures en figures
Daus i ruletes				X			X						Sentit i mesura de la probabilitat; sentit espacial i representació de figures tridimensionals
Recompte de camins mínims entre dos punts d'una quadrícula		X		X	X	X		X		X			Sentit espacial i representació de figures tridimensionals; sentit i mesura de la probabilitat
Interpretació i construcció de gràfics estadístics	X					X			X	X			Dades, taules i gràfics estadístics; magnituds i mesura
Interpretació geomètrica de la mitjana i d'altres mesures estadístiques							X		X				Sentit de l'estadística
Recompte de pedretes i de persones		X		X		X		X					Sentit de l'estadística; raonament proporcional
Recompte de cigrons, balenes, peixos o esquirols		X		X		X		X					Sentit de l'estadística; raonament proporcional

BIBLIOGRAFIA

ALSINA, C., NELSEN, R. B. (2006). *Math Made Visual. Creating images for understanding Mathematics*. Washington, MAA.

— (2011). *Icons of Mathematics: An Exploration of Twenty Key Images*. Washington, MAA.

ARNOLD, V. I. (1988). «Models matemàtics durs i models matemàtics tous». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 13, núm. 1, p. 7-26. També disponible en línia a: <*http://www.raco.cat/index.php/ButlletiSCM/article/view/149238*> [Consulta: 28 febrer 2015].

AUBANELL, A. (2006). *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*. Llicència d'estudis retribuïda pel Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya, Barcelona, Departament d'Ensenyament. Disponible en línia a: <*http://www.xtec.cat/web/innovacio/bdllicencies*> [Consulta: 28 febrer 2015].

BATLLE, I., SERRA, T. I TORRA, M. (1995). *Matemàtiques a la Carta.* Bellaterra, Publicacions de l'ICE de la UAB.

CANALS, M. A. (2010). *Els reglets*. Barcelona, Associació de Mestres Rosa Sensat (Col·lecció Dossiers de la Maria Antònia Canals).

CASTELNUOVO, E. (1981). *La Geometria*. Barcelona, Ketres Editora.

CONSELL SUPERIOR D'AVALUACIÓ DEL SISTEMA EDUCATIU (2014). *Els resultats de PISA 2012 a Catalunya.* Barcelona, Departament d'Ensenyament, Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu (Col·lecció Quaderns d'avaluació, 27). En línia: <*http://csda.gencat.cat/ca/arees_d_actuacio/publicacions/quaderns_avaluacio/*> [Consulta: 28 febrer 2015].

— (2015). *L'avaluació de quart d'ESO 2014.* Barcelona, Departament d'Ensenyament, Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu (Col·lecció Quaderns d'avaluació, 28). En línia: <*http://csda.gencat.cat/ca/arees_d_actuacio/publicacions/quaderns_avaluacio/*> [Consulta: 28 febrer 2015].
DAVIS, P. J. I HERSH, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Barcelona, Labor-Ministerio de Educación y Ciencia.
DEPARTAMENT D'ENSENYAMENT (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria*. Barcelona, Departament d'Ensenyament, Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat. També a: <*http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/col_leccions/competencies_basiques/competencies_mates_eso.pdf*> [Consulta: 28 febrer 2015].
— (2012). *Orientacions per a la millora de l'aprenentatge de la Geometria a l'ESO*. Barcelona, Departament d'Ensenyament, Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, en línia: <*http://www.xtec.cat/web/curriculum/eso/orientacions*>. [Consulta: 28 febrer 2015].
ELLIS, A., BIEDA, K., KNUTH, E. J. (2012). *Developing Essential Understanding of Proof and Proving (Grades 9-12)*. Reston (EUA), The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
GUZMÁN, M. DE. (1992). «Tendències innovadores en educació matemàtica». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques,* 7, p. 7-34. També disponible en línia a: <*http://www.raco.cat/index.php/ButlletiSCM/article/view/202748*> [Consulta: 28 febrer 2015].
KATZ, V. J. (2007). «Stages in the history of algebra with implications for teaching». *Educational Studies in Mathematics*, 66, p. 185-201.
LAPPAN, G., PHILLIPS, E. D., FEY, J. T., FRIEL, S. N. (2014). *Thinking with Mathematical Models. Linear and Inverse Variation*. Boston, Pearson (Col·lecció Connected Mathematics).
MEYER, D. *Activitat matemàtica en tres actes «popcorn picker»* [en línia]. <*http://threeacts.mrmeyer.com/popcornpicker/*> [Consulta: 28 febrer 2015].
NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla, SAEM Thales.
NELSEN, R. B. (2001). *Demostraciones sin palabras*. Granada, Proyecto Sur.
PEULEN, K., *Euclid: The Game* [en línia] <*http://euclidthegame.com/*> [Consulta: 28 febrer 2015].
PLA I CARRERA, J. (2006). *Introducció a la metodologia de la matemàtica*. Barcelona, Publicacions i Edicions de la UB.
PÓLYA, G. (1963). «On Learning, Teaching and Learning Teaching». *American Mathematical Monthly*, 70, p. 605-619.
PUIG ADAM, P. (1956). «Estructuras algebraicas en un juego de mosaico». *Mathematica & Pedagogica,* 10.
— (1956). *Didáctica Matemática Eurística.* Madrid, Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.
— (1958). *El material didáctico actual, presentado en la XI reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y la Enseñanza Matemática y Exposición Internacional simultánea (Madrid, 21-27 de abril de 1957).* Madrid, Publicaciones de la revista Enseñanza Media.
— (1960). *La Matemática y su enseñanza actual.* Madrid, Ministerio de Educación Nacional.
REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA (2011). «Una caminata de más de tres horas», *El país. Desafíos matemáticos*, 19 juliol 20111. També disponible en línia a: <*http://goo.gl/Uj2xWH*> [Consulta: 28 febrer 2015].
TICÓ, T. (2009). *Activitats matemàtiques, Any Cerdà* [en línia]. <*http://www.anycerda.org/web/arxiu-cerda/fitxa/activitats-atematiques/188*> [Consulta: 28 febrer 2015].

Adreces web d'interès

ASSOCIACIÓ CATALANA DEL GEOGEBRA. <*http://acgeogebra.cat/*> [Consulta: 28 febrer 2015].

Departament d'Ensenyament. *ARC, Aplicació de Recursos al Currículum.* <*http://apliense.xtec.cat/arc/*> Consulta: 28 febrer 2015].

Departament d'Ensenyament. *Itinerari de Formació Interna de Centre (FIC): La geometria a l'educació secundària obligatòria.* <*http://www.xtec.cat/web/formacio/fecb/fic/itineraris/guiats/sec_geometria*> i materials a <*http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/fic/cma/cma04/index*> [Consulta: 28 febrer 2015].

Departament d'Ensenyament, Cesire Creamat. *Impulsem la geometria.* <*http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/impulsem-la-geometria*> [Consulta: 28 febrer 2015].

Entitats diverses. V*ídeoMAT* . <*http://www.videomat.cat/*> [Consulta: 28 febrer 2015].

—. *Concursos de fotografia matemàtica: ABEAM, ADEMGI, FotoMath (UdL)*. <*http://fotografiamatematica.cat/blg/*>, <*http://ademgi.feemcat.org/concurs-de-fotografia/*> i <*http://www.fotomath.udl.cat/2m13/*> [Consulta: 28 febrer 2015].

Freudenthal Institut. *Freudenthal repository, Teaching materials for STEM*. <*http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/en/*> [Consulta: 28 febrer 2015].

Institut d'Estadística de Catalunya (Idescat). *Aprenestadistica.cat* [en línia]. <*http://aprenestadistica.idescat.cat/secundaria/index.html*> [Consulta: 28 febrer 2015].

Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA). <*http://www.mmaca.cat/*> [Consulta: 28 febrer 2015].

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Illuminations*. <*illuminations.nctm.org*> [Consulta: 28 febrer 2015].