Cb

14

Competències bàsiques

Educació secundària obligatòria. Primer cicle

CURS 2005-2006

Proves d'avaluació - Àmbit matemàtic

Anàlisi de resultats i orientacions per a la millora

Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació

Cb

14

Competències bàsiques

Educació secundària obligatòria

Primer cicle

CURS 2005-2006

Proves d'avaluació - Àmbit matemàtic

Anàlisi de resultats i orientacions per a la millora

Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació

Nota: Cada vegada que s'esmenta *mestres*, *professors*, *alumnes*, etc., s'entén que es fa referència a ambdós sexes indistintament.

Edició: **Servei de Difusió i Publicacions**
Coordinació: **Direcció General d'Ordenació i Innovació Educativa**
i Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu
Disseny: **Estudi Juste Calduch**
1a edició: **març de 2007**
Tiratge: **2.000 exemplars**
Dipòsit legal: **B-22.393/2007**
Impressió: **Gràfiques Orient, SA**

ÍNDEX

Presentació

Durant el curs 2001-2002, el Departament d'Educació va iniciar l'avaluació del domini de les competències bàsiques a l'alumnat de 14 anys en diferents àmbits. Després de dues fases de dos anys, en les quals es va analitzar de manera més global l'assoliment d'aquestes competències, les proves del curs 2005-2006 s'han focalitzat en competències de l'àmbit matemàtic, tal com ja es va fer el curs anterior en l'educació primària.

L'objectiu de les proves és facilitar als centres educatius unes dades objectives i uns elements de reflexió que permetin descobrir buits o diferències d'enfocament d'un determinat tema o, per contra, remarcar-ne el bon enfocament, així com també aportar referents del coneixement matemàtic més globals, i estadísticament validats, per a enriquir el seu procés d'avaluació interna. Els resultats de les proves han de comportar als centres una reflexió del professorat sobre el procés d'assoliment de les competències avaluades.

A fi d'oferir als centres uns referents que permetin una visió completa i contextualitzada dels resultats obtinguts, el Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu ha dut a terme una aplicació externa de les proves a una mostra de 100 centres de Catalunya. Part d'aquests centres han constituït la mostra d'altres estudis d'avaluació realitzats enguany, alguns d'internacionals com l'estudi PISA, per tal de poder conèixer millor la situació de l'educació secundària a Catalunya, com preveu el Pla d'Avaluació del Departament per al curs 2006.

Més enllà del valor estadístic que tenen els resultats de les proves, és convenient que es facin servir per a avançar en la coherència del treball al centre, en la mesura en què, si bé l'avenç que fan els nois i les noies en l'aprenentatge de les matemàtiques s'esdevé dia rere dia i curs rere curs, també és important analitzar l'evolució del centre al llarg dels anys.

L'enfocament competencial i interdisciplinari de les proves, com s'ha dit a bastament en el document *Guia d'aplicació i correcció*, permet l'anàlisi dels resultats per part del professorat de diferents àrees i és a partir d'aquesta anàlisi de conjunt que es poden orientar processos d'innovació més compartits i en profunditat.

Per a ajudar a aquesta reflexió, aquest document s'ha organitzat en tres apartats. El primer consisteix en unes *Reflexions sobre el desenvolupament de les competències matemàtiques en l'educació secundària obligatòria*. El segon, *Síntesi de resultats*, exposa, com en cursos anteriors, els resultats obtinguts en l'aplicació externa de les proves als centres de la mostra.

El tercer apartat, *Orientacions per a la millora*, és la part més nova de la publicació: inclou algunes de les activitats de les proves especialment significatives i presenta un recull de respostes reals de l'alumnat. Aquests exemples s'acompanyen de comentaris i orientacions metodològiques per tal que serveixin de punt de partida per a la reflexió i la presa de decisions de millora.

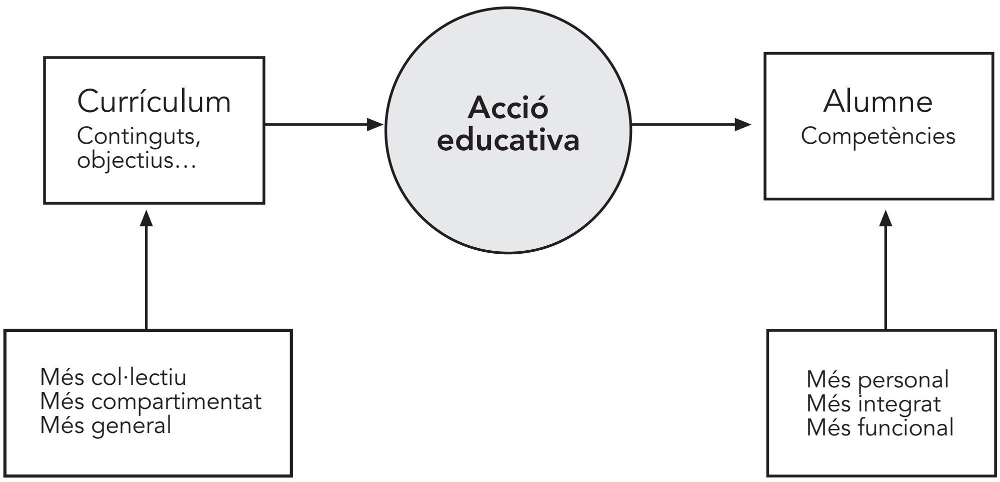
I. Reflexions sobre el desenvolupament de les competències matemàtiques en l'educació secundària obligatòria (*)

Anar cap a un plantejament curricular competencial implica, sens dubte, un avenç considerable respecte a la llista tradicional de continguts, habilitats, etc. que solia conformar els currículums. Però, més enllà de la lletra impresa, seria desitjable que el **treball competencial** esdevingués una nova manera d'entendre i de treballar les matemàtiques a l'aula.

El matemàtic danès Mogens Niss defineix *la competència matemàtica* com l'habilitat d'entendre, jutjar, fer i usar les matemàtiques en una gran varietat de situacions i contextos en els quals la matemàtica juga, o podria jugar, un paper important.

En les definicions de *competència* sempre es relacionen tres aspectes: *els continguts específics*, que són a la base curricular i que s'aborden de manera integrada entre disciplines, *els processos generals multifuncionals* i *la capacitat d'aplicació contextualitzada*, que inclou components transversals, consubstancials amb la mateixa idea de competència.

Un plantejament competencial convida a posar atenció en els resultats que l'acció educativa té sobre la formació general de l'alumne concret, des d'un punt de vista més personal, més integrat i més funcional. Es pot representar en un esquema:



En la pràctica educativa s'ha centrat prioritàriament l'interès en la part esquerra de l'esquema. La idea de competència impulsa a fixar-se en el contingut de la part dreta, que tal volta és més indefinit i menys controlable pel que té de personal, però que és el resultat real de l'acció, que queda en la formació dels alumnes i que, en definitiva, s'incorpora a la cultura matemàtica col·lectiva de la nostra societat. En aquest sentit, el plantejament competencial representa un avenç qualitatiu molt important.

* Document elaborat pels professors Claudi Alsina, de la Universitat Politècnica de Catalunya, i Anton Aubanell, de l'IES Sa Palomera, de Blanes.

Les competències matemàtiques

Una primera aproximació general a les competències matemàtiques ens porta a fixar les anomenades vuit grans competències que han d'assolir els nois i noies:

• PENSAR MATEMÀTICAMENT

Pensar matemàticament implica cultivar les estratègies cognitives que són pròpies de la disciplina; Miguel de Guzmán convidava a «pensar millor» per la via de practicar el pensament matemàtic. En el pensament matemàtic s'aixopluga el fet d'entendre conceptes, saber fer abstraccions, intuir, relacionar conceptes, generalitzar, criticar models, etc. Aquest pensament es desenvolupa també amb jocs i amb problemes que són tot un repte, amb la seva aplicació a la realitat i molt particularment a la vida quotidiana... Però no es pot desenvolupar amb exercicis rutinaris o algorismes.

• RAONAR MATEMÀTICAMENT

Raonar matemàticament és fer deduccions, apreciar la necessitat de demostrar i entendre millor els conceptes a través de les pròpies demostracions seleccionades, sense oblidar poder traspassar el rigor disciplinari i el sentit crític als raonaments quotidians. Raonar matemàticament no és recitar de memòria; ans al contrari, raonar té un fort component creatiu.

• RESOLUCIÓ DE PROBLEMES

Resoldre problemes ofereix el més genuí entrenament per a esdevenir competent. Algunes de les propostes més avançades en resolució de problemes comparteixen la creença que resoldre problemes és quelcom que mereix ser treballat en si mateix. Resoldre problemes no és sols una tècnica per a verificar si una cosa se sap fer. Hi ha problemes tancats i oberts, purs i aplicats, però els problemes sempre han de ser incitadors i atractius. Els problemes de les proves de competències bàsiques i els de l'estudi PISA són exemples d'enunciats per a posar a prova si se sap relacionar la matemàtica escolar amb la vida quotidiana.

• MODELITZACIÓ

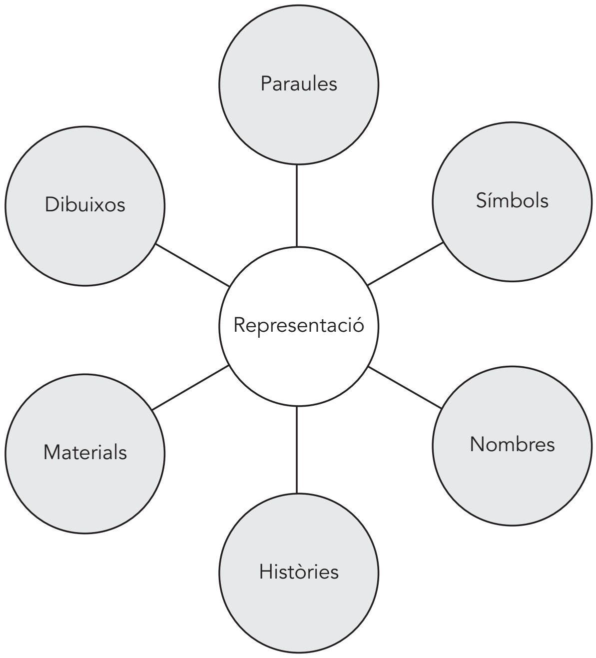
Seguint Hans Freudenthal, modelitzar es correspon amb la competència per a matematitzar, per a anar del món real al model matemàtic i del model matemàtic al món real, en un fi joc de fer més bons models obtenint i interpretant els resultats. Tom Romberg, Jan de Lange i Sol Garfunkel proposen com fer de la modelització un eix vertebrador de l'ensenyament. En fer petits models matemàtics, els nois i noies tenen aleshores l'oportunitat de viure una mica el que és la forma de «fer matemàtiques».

• COMUNICACIÓ

La competència de comunicar correspon a saber explicar bé el que es fa o es veu, les idees i els mètodes, saber usar diferents recursos expressius (gràfics, quantitatius, qualitatius...) i saber entendre el que sobre el mateix tema expliquin els altres. Òbviament aquesta competència està estretament relacionada amb la de representació, que pot aportar elements clau a la comunicació.

• REPRESENTACIÓ

Aquesta competència acull tot un conjunt de nombrosos materials o recursos, que representen tant objectes com situacions. El tema de la representació s'estructura en sis grans apartats:



La *comunicació-representació* resulta molt més interessant si es va passant d'un recurs a un altre, codificant i descodificant, sabent usar diverses alternatives de representació, etc.

• ÚS DEL SIMBOLISME

Cal usar i interpretar tota mena de simbolismes, relacionant això amb el llenguatge natural, entenent la sintaxi i la semàntica, manipulant la formalització. Karl Menger afirmava que cal mirar molt atentament el simbolisme, ja que és imprescindible, però no pot ser confús. Gran part de les dificultats dels escolars estan precisament en la confusió conceptual que s'aixopluga darrere simbolismes anacrònics dels quals es fa un ús abusiu.

• ÚS D'INSTRUMENTAL

Es tracta de saber usar bé, amb els seus límits i virtuts, tota mena de materials manipulables, programes informàtics, aparells de comunicació o reproducció... Entre el material Montessori i la factoria de Bill Gates hi ha, evidentment, un canvi profund. Però, curiosament, la didàctica en els diversos nivells educatius pot aprofitar tant materials antics com moderns. Els reglets de Maria Antònia Canals són perfectament compatibles amb les miniaplicacions de Microprices. Ara bé, la competència instrumental no és quelcom inherent als instruments o les tecnologies, sinó que ha de ser inherent als alumnes, a la seva capacitat d'usar correctament tots els instruments al seu abast (que avui són molts). En aquest «usar bé» també cal incloure-hi saber veure si els resultats obtinguts tenen sentit o si el cost de l'ús és raonable o no.

A les competències anteriors cal unir quelcom fonamental:

– SABER LES CARACTERÍSTIQUES GENUÏNES DE LES MATEMÀTIQUES

Saber aplicar les matemàtiques, conèixer el desenvolupament històric de les matemàtiques i entendre la natura específica de la disciplina.

– EXPERIMENTAR EMOCIONS MATEMÀTIQUES

Cal considerar també el vessant emocional de la matemàtica, és a dir, descobrir que també en fer matemàtiques cal experimentar emocions, viure les sorpreses, desenvolupar la curiositat i l'interès, humanitzar la història de la matemàtica... Caldria que, almenys un cop en la seva trajectòria escolar, l'alumnat s'emocionés fent un problema, lluités per resoldre'l i n'assolís l'èxit de manera que pogués assaborir, de primera mà, la paradoxa que el treball i l'esforç en matemàtiques poden produir satisfacció.

La competència i l'acció educativa

Algun cop s'ha dit que el missatge més important que transmetem és la manera com transmetem els missatges. Un plantejament competencial requereix una manera de treballar a classe. Un plantejament competencial pot veure's afavorit intentant que, en la classe de matemàtiques, hi hagi...

1. **Més equilibri curricular**. Sovint es dediquen les primeres sessions de cada curs a l'aritmètica i sovint el tractament que en fem la converteix en un *forat negre* que, a causa d'una *massa gravitacional* tal volta sobredimensionada, absorbeix un volum desproporcionat de temps i d'esforç que no tan sols pot arribar a esgotar alumnes i professorat, sinó que deixa poc temps per a treballar altres parts que també són prou importants com ara la geometria o el tractament de l'atzar i l'estadística. Tal vegada la nostra pròpia formació acadèmica, els llibres de text o una suposada jerarquització dels temes matemàtics podrien explicar aquests desequilibris, però potser podríem plantejar-nos correccions que, sense oblidar el pes natural de les diferents parts, repartissin millor l'esforç escolar. Això ens convida a reflexionar, per exemple, sobre la possibilitat d'alternar l'ordre dels temes que tractem, de manera que, per exemple, a primer curs es comencés per l'aritmètica i a segon, per la geometria i el tractament de l'atzar.

2. **Més flexibilitat en el tractament dels continguts** per a permetre una major obertura en el desenvolupament dels temes. Deixar-se portar per una pregunta, aprofitar la curiositat, copsar un moment màgic en què l'interès ens permet aprofundir un aspecte, frenar quan veiem que no podrem avançar amb eficàcia... Les programacions són guies necessàries, però mai no haurien de comprometre la necessària adaptabilitat a les situacions i circumstàncies.

3. **Més connexions internes** que projectin una visió global de la matemàtica. El saber matemàtic respon a un cos conceptual profundament interrelacionat. Una mateixa idea pot ser contemplada des de diferents perspectives. L'eficàcia de la nostra acció docent podria beneficiar-se de plantejaments que responguessin a una major vocació integradora que aprofités a fons les connexions i trenqués una mica la compartimentació entre els diversos blocs de continguts. Per exemple: quan fem geometria o estadística podem treballar alguns aspectes d'aritmètica; quan tractem funcions podem emprar idees geomètriques; hi ha grans eixos temàtics que conviden a la integració com ara la proporcionalitat o la mesura...

4. **Més context** tant en l'origen dels problemes que ens plantegem com en l'aplicació de les eines que presentem. La nostra alimentació ha de contenir proteïnes, greixos, hidrats de carboni, vitamines..., però el procés nutritiu perdria molt del seu encant si aquests components no s'integressin en aliments de diferents gustos, colors, olors i textures. La combinació d'aquestes característiques ha convertit l'alimentació en un plaer i, en alguns casos, en un art. Igualment, els continguts curriculars haurien de servir-se integrats en contextos rics i diversos. Prou rics perquè motivessin i prou diversos perquè cobrissin àrees àmplies del nostre entorn natural, social i cultural. És bo saber reconèixer en les situacions que ens envolten aspectes susceptibles de ser interpretats, analitzats, descrits, solucionats... des de les matemàtiques. Emprant una expressió de Pere Puig Adam, cal que l'alumnat aprengui a descobrir el sentit de *l'essencial que hi ha en una situació o problema*.

5. **Més amplis enllaços interdisciplinaris**. Sovint el treball matemàtic a l'escola se circumscriu únicament a les classes de matemàtiques i sovint en les nostres classes tan sols fem matemàtiques. Cercar ponts amb les altres matèries pot resultar molt valuós per a apropar-nos a una visió més integrada pròpia d'un plantejament competencial del currículum. Des d'una perspectiva instrumental, a vegades ens hem preguntat què poden fer les matemàtiques per a col·laborar en la construcció del coneixement de les altres matèries. Tal volta aquest curs, en què les proves de competències bàsiques s'han centrat en l'àmbit matemàtic, és un bon moment perquè tots plegats ens preguntem també què poden fer les diverses matèries del currículum per a col·laborar en l'assoliment de les competències matemàtiques. La interdisciplinarietat és consubstancial amb un enfocament competencial del currículum.

6. **Més treball personal i en grup entorn de la resolució de problemes** tot respectant els estils particulars de cada alumne a l'hora d'enfrontar-s'hi. Les matemàtiques són un marc privilegiat per a aquest tipus de treball. Convé fomentar les preguntes, la formulació de conjectures, la discussió, el contrast d'idees, l'assaig i el tempteig, l'aprenentatge a partir dels errors, l'hàbit de resoldre problemes de diferents tipus, plantejats segons formats diversos... El professorat ha de saber intervenir sense interferir, ha de saber estimular més que no explicar i ha d'evitar respondre preguntes que els alumnes encara no s'han plantejat. Paul Halmos posa de manifest aquest fet amb unes paraules que difícilment poden ser més significatives: «La millor manera d'aprendre és fer; la pitjor manera d'ensenyar és parlar».

7. **Més valoració de la creativitat, la imaginació, la tenacitat, la posada en marxa de recursos diversos** (tempteig, experimentació, recursos gràfics, models, TIC...) a l'hora de resoldre un problema. Aquestes qualitats aportaran a l'alumne una agilitat en el treball matemàtic que li permetrà enfrontar-se amb èxit a problemes nous, en contextos inexplorats, amb estils d'enunciats diferents...

8. **Més atenció al llenguatge i a la comunicació en general**. El llenguatge —oral o escrit— és el vehicle de comunicació més habitual a classe. A través d'aquest canal circulen les idees que, en un sentit o en un altre, volen transmetre's. Hi ha dos aspectes importants que convé cultivar amb els nostres alumnes: la comprensió d'allò que s'escolta o d'allò que es llegeix i l'expressió oral i escrita. Convé no oblidar que el fet mateix d'haver d'expressar una idea comporta una tasca d'ordenació i de formalització en paraules que pot ajudar a comprendre millor la idea. Aquests aspectes són especialment importants en la resolució de problemes contextualitzats, ja que sovint arribem al context a través del text i les dificultats de comprensió lectora poden comprometre la resolució del problema malgrat que les idees matemàtiques que es manegin siguin conegudes (aquest fet no és gens negligible en l'avaluació de les competències bàsiques). Hauríem de cultivar més decididament els aspectes de comunicació i, més enllà de l'atenció al llenguatge oral o escrit, que és fonamental, hauríem d'introduir altres fonts de context en els enunciats d'alguns problemes, especialment imatges i objectes materials.

9. **Més visualització**. La forta tendència formalista que va caracteritzar la matemàtica superior durant una part de la segona meitat del segle passat va produir un reflex escolar en la mateixa direcció. Amb la idea d'educar l'abstracció es va prescindir de manera radical d'aspectes vinculats a l'experiència concreta i a la intuïció que ja eren força presents a l'escola abans d'aquell període. Recuperat un enfocament més aplicat, i sobretot obeint a la necessitat de comunicar eficaçment i d'oferir als alumnes un bon nivell de competència social, la matemàtica escolar va incorporant cada cop més el sentit de la concreció tot concedint la importància que es mereixen a la intuïció, a la visualització o a l'experiència pràctica amb objectes i materials didàctics específics.
   Claudi Alsina i Roger B. Nelsen, en el seu llibre *Math Made Visual*, afirmen que «la visualització pot ser una eina per desenvolupar la intuïció, per iniciar la solució d'un problema o un camí natural per identificar conceptes. Però també juga un paper central en la important tasca de crear demostracions». La visualització pot ser un gran recurs per a l'educació matemàtica especialment si aprofitem a fons les possibilitats que, en aquest sentit, ofereixen les noves tecnologies. Tanmateix, més enllà de la seva utilitat didàctica, té una importància formativa de primer ordre. El desenvolupament de capacitats de pensament visual en els nostres alumnes els dota d'una eina poderosa aplicable tant en l'àmbit matemàtic com en situacions diverses de la vida quotidiana.

10. **Més manipulació d'objectes i de materials didàctics**. En la mateixa línia de recuperació del sentit de la concreció que s'apuntava en el punt anterior, l'escola hauria d'impulsar l'ús de materials manipulables i d'objectes quotidians. Maria Montessori deia que «el nen té la intel·ligència a les mans»; Henri Poincaré afirmava: «Només hi ha dos mètodes per a ensenyar fraccions:

tallar, encara que sigui mentalment, un pastís, o fer-ho amb una poma. Amb qualsevol altre mètode d'ensenyament els escolars prefereixen sumar numeradors amb numeradors i denominadors amb denominadors», i George Pólya escrivia: «L'aprenentatge comença amb acció i percepció, continua amb paraules i conceptes, i ha de finalitzar amb hàbits mentals desitjables. [...] "acció i percepció" ha de suggerir manipular i veure coses concretes com pedres, o pomes, o reglets Cuisenaire; o regle i compàs; o instruments en un laboratori». Sense arraconar de cap manera el genuí component abstracte del saber matemàtic, hem de reconèixer que, en l'ensenyament general, pot ser bo proposar experiències matemàtiques de tipus concret, material, vivencial, ja que resulten més properes a l'alumnat i al seu entorn i poden ser molt útils per a motivar, per a simular, per a construir, per a mostrar, per a demostrar, per a aplicar... coneixements matemàtics.

11. **Més atenció als processos generals i a les actituds específiques** que caracteritzen el quefer matemàtic com a eixos transversals interns que poden ser treballats des de tots els blocs temàtics. Són exemples de processos generals: el raonament, la representació, la modelització, l'estimació i desestimació d'estratègies, el tempteig... Són exemples d'actituds específiques: el gust per la quantificació, la valoració de la precisió, l'actitud d'observació i de reflexió, el gust per l'argumentació lògica, el gust pels reptes matemàtics...

12. **Més temps**. L'aprenentatge requereix temps i cada alumne necessita el seu temps. Convé prendre's el temps necessari per a crear un ambient de serenor que faci possible un treball ric i fecund. Per exemple, en la resolució de problemes, cal donar temps perquè l'alumnat se'ls plantegi personalment, s'hi enfronti, prengui decisions i, si és possible, gaudeixi del repte i en surti airós. Sense aquest temps la resolució del problema perd eficàcia educativa. Malgrat que sovint desitjaríem fer activitats més ràpides per poder-ne fer més, hem de tenir present que és més important la qualitat de les activitats que desenvolupem que la quantitat d'activitats que fem.

S'acaba de celebrar el cinquantè aniversari del decàleg de Pere Puig Adam. Ell el va escriure per al professorat de la seva època i pensant en aquella secundària que ell va viure. El professorat actual som fills i néts dels qui varen rebre aquell decàleg i els nostres estudiants de secundària ja no pertanyen, en general, al tipus d'estudiant que el 1955 ocupava les aules del país. Malgrat això, avui aquells deu consells són ben actuals i ens semblen un excel·lent equipatge per a portar a la motxilla en el camí d'ajudar-nos a assolir un major grau de competència matemàtica en el nostre alumnat.

Decàleg de l'educació matemàtica

1. No adoptar una didàctica rígida, sinó adaptada en cada cas a l'alumne, observant-lo constantment.
2. No oblidar l'origen concret de la matemàtica ni els processos històrics de la seva evolució.
3. Presentar la matemàtica com una unitat en relació amb la vida natural i social.
4. Graduar acuradament els plans d'abstracció.
5. Ensenyar guiant l'activitat creadora i descobridora de l'alumne.
6. Estimular aquesta activitat despertant interès directe i funcional vers l'objecte del coneixement.
7. Promoure tant com es pugui l'autocorrecció.
8. Aconseguir un cert mestratge en les solucions abans d'automatitzar-les.
9. Tenir cura que l'expressió de l'alumne sigui traducció fidel del seu pensament.
10. Procurar a qualsevol alumne èxits que n'evitin la desmoralització.

Pere Puig Adam (1955)

Referències bibliogràfiques

• Alsina, C.; Nelsen, R. B. *Math Made Visual. Creating images for understanding Mathematics*. Washington: MAA, 2006.

• Aubanell, A. *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*. Memòria de la llicència. Barcelona: 2006.

• Balbuena, L. «La interdisciplinarietat: una moda o una necessitat». Dins: *UNO*. 2000, núm. 23, pàg. 45-56.

• Delong, M.; Winter, D. *Learning to teach & teaching to learn Mathematics*. Washington: MAA, 2002.

• *Debat sobre el sistema educatiu català. Conclusions i propostes*. Conferència Nacional d'Educació. Barcelona: Departament d'Ensenyament, 2002 (www.gencat.net/educacio/csda/actuacions/conf_nac.htm).

• Guzmán, M. de. *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Madrid: Ed. Pirámide, 1994.

• *Marc conceptual per a l'avaluació. Pisa 2003*. Barcelona: Departament d'Educació, 2004. (www.gencat.net/educació/csda/documents/pisa2003/marcs.pdf)

• National council of teachers of mathematics. *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, Estats Units, 2000 (www.nctm.org).

• Steen, L. A. *Matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Ed. Addisson-Wesley, 1999.

II. Síntesi de resultats

Proves d'avaluació de competències bàsiques del curs 2005-2006

Les proves, administrades en el curs 2005-2006, contenen ítems que avaluen les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic i també d'altres que, tot i fer referència a continguts matemàtics, permeten avaluar competències de l'àmbit lingüístic, de l'àmbit social i natural i de l'ús de les tecnologies de la informació i la comunicació (TIC). Les proves estan pensades des d'una perspectiva global d'integració de l'aprenentatge, i en aquest sentit abasten, a més de les matemàtiques, altres àrees de coneixement. En l'annex I es pot trobar la relació de competències i les activitats en què han estat avaluades.

Una competència de l'àmbit social i científic com ara buscar, seleccionar, organitzar i analitzar informació de diverses fonts s'ha avaluat a partir de les activitats proposades, que són activitats que relacionen les àrees de ciències socials, ciències de la naturalesa i tecnologia i també les matemàtiques, i ofereixen així la possibilitat d'analitzar la informació que presenten des d'aquesta perspectiva. Pel que fa a l'àmbit lingüístic, la comprensió escrita ha estat a la base de la realització d'aquestes proves: els nois i noies han hagut de poder llegir les propostes i comprendre el que s'ha demanat, fent les inferències oportunes.

També l'ús de la llengua, en uns casos oral (en la prova de grup) i en uns altres escrita, ha estat directament relacionat amb la matemàtica. S'han presentat activitats que proposaven l'ús de la llengua per a expressar el coneixement matemàtic i valorar a partir d'aquestes produccions el domini de determinats coneixements de l'àmbit matemàtic.

Aquestes propostes s'inscriuen en la concepció que la verbalització del pensament matemàtic afavoreix la integració dels aprenentatges que els nois i noies van fent de les matemàtiques i al mateix temps afavoreix el desenvolupament de l'aprenentatge de la llengua en un context específic, que és el de les matemàtiques; context, val a dir, que sovint exigeix descripcions acurades, compliment de condicions, establiment d'hipòtesis, deduccions, etc.

Característiques de la mostra seleccionada

La mostra ha estat constituïda per 2.330 alumnes de 2n d'ESO procedents de 100 centres. D'aquests 100 centres 49 són els mateixos que els de la mostra del curs 2003-2004 i 51 són centres que en el curs 2005-2006 han participat en el projecte PISA (Programme for International Student Assessment) i en l'avaluació de l'educació secundària obligatòria 2006(*).

Els centres de la mostra s'han seleccionat segons el nivell socioeconòmic de la població on estan ubicats —baix, mitjà o alt (en una proporció del 20%, 60% i 20% respectivament)— en els estrats

* Per a més informació sobre el projecte PISA i l'avaluació de l'educació secundària obligatòria 2006, es pot consultar la web del Consell Superior d'Avaluació (http://www.gencat.net/educacio/csda).

d'hàbitat corresponents a més de 100.000 habitants, d'una banda, i al tram comprès entre 10.001 i 100.000 habitants, de l'altra. En el cas de centres pertanyents a poblacions de menys de 10.000 habitants, no s'ha establert diferenciació de nivell socioeconòmic.

La proporció d'alumnat amb necessitats educatives especials i d'alumnat nouvingut que ha format part de la mostra és la que segueix:

Percentatge d'alumnat amb NEE que ha format part de la mostra	Percentatge d'alumnat nouvingut que ha format part de la mostra
0,6%	3,1%

Tot i que les proves de competències bàsiques s'han dissenyat perquè les passi tot l'alumnat de 2n d'ESO, han estat els mateixos centres docents els que han optat per incloure o no l'alumnat amb necessitats educatives especials i/o nouvingut, tenint en compte les orientacions següents:

- Es considera alumne amb NEE aquell que té un dictamen de l'EAP que així ho avala. Tot i que el centre pot considerar convenient que l'alumne realitzi la prova, pot excloure's a l'hora de la comptabilització de resultats globals del centre.

- Pel que fa a l'alumnat nouvingut, s'ha considerat que el seu domini de la llengua li permeti la realització de la prova.

Distribució dels centres docents que han constituït la mostra

POBLACIONS	SERVEIS TERRITORIALS								TOTAL
	BCN 1	BCN 2	B. Llobregat - Anoia	Vallès Occidental	Girona	Lleida	Tarragona	Terres de l'Ebre	
> 100.000 hab.	23	11	–	6	–	2	2	–	**44**
10.000-100.000 hab.	–	9	10	5	5	–	3	1	**33**
< 10.000 hab.	–	9	2	1	4	4	2	1	**23**
TOTAL	**23**	**29**	**12**	**12**	**9**	**6**	**7**	**2**	**100**

Anàlisi dels resultats

En aquest informe es presenten els resultats globals d'assoliment de les competències de l'alumnat al final del primer cicle de l'ESO dels 100 centres que han constituït la mostra per tal que cada centre tingui un marc comparatiu i faci una anàlisi més qualitativa i contrastada dels seus resultats, ja que la finalitat de les proves és enriquir l'avaluació interna que fa el mateix centre. Les dades que s'obtenen ajuden el centre a comprendre més bé la seva realitat, com a pas imprescindible per a plantejar estratègies de millora en la definició i selecció del currículum i la metodologia a aplicar, tant a nivell general com per a cada noi i noia en concret.

La comparació dels resultats del centre amb els resultats de la mostra i amb els propis resultats d'anys anteriors pot servir per a corroborar que allò que semblava que anava bé hi va o per a identificar on convé incidir i analitzar determinades actuacions amb vista a incrementar les competències de l'alumnat.

Com a criteri de domini de la competència, és a dir, per a considerar que un alumne o alumna té una competència assolida de forma consistent, s'ha fixat la superació a l'entorn del 65% dels ítems que mesuren la competència.

És important relacionar el resultat obtingut en cada competència amb les activitats, els tipus de prova i els coneixements i habilitats emprats per a la seva realització, així com també amb els criteris de referència establerts. Aquests criteris poden consultar-se en l'aplicació informàtica de correcció de les proves.

Com ja s'ha dit anteriorment, els centres de la mostra estan distribuïts per trams de població. Atès que l'objectiu de les proves no és pas obtenir un rànquing de centres per categories, sinó facilitar-los una eina útil d'estudi per a analitzar els seus rendiments, davant el dubte de situar-se en una o altra franja socioeconòmica, els centres podran fer l'anàlisi en relació amb diferents trams.

Resultats de l'assoliment de les competències

Percentatge d'alumnat de 2n curs d'ESO que assoleix les competències

Competències - àmbit matemàtic		% d'alumnat que assoleix la competència A	% d'alumnat que assoleix la competència B
M1 Aplicar el coneixement del sistema de numeració decimal i de les operacions per a comparar, relacionar nombres i operar amb rapidesa, buscant segons la situació un resultat exacte o aproximat.		48%	56%
M2 Usar tècniques de representació geomètrica per a descriure, raonar i projectar canvis en les formes i en els espais.		31%	53%
M3 Emprar amb precisió i criteri les unitats de mesura.		45%	54%
M4 Usar amb propietat instruments i tècniques per a dibuixar, mesurar i calcular.		44%	53%
M5 Planificar i seguir estratègies de resolució de problemes i modificar-les si no es mostren prou eficaces.		61%	78%
M6 Usar i interpretar llenguatge matemàtic com ara xifres, signes i altres representacions gràfiques o dibuixos per a descriure fenòmens habituals.	**M6a** Dibuix	39%	53%
	M6b Gràfic	53%	77%
	M6c Xifres i signes	57%	77%
M7 Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressar quantitat, identificació, temps, mesura, intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques.		43%	58%
M8 Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià, en particular en casos de proporcionalitat directa.		49%	75%
M9 Comparar la factibilitat de fets aleatoris en situacions simples.		74%	87%
L11 Comprendre i interpretar la informació d'un text escrit en relació amb la funció i la tipologia del text, la informació que conté i els coneixements propis.		48%	63%
L14 Produir un text escrit adequat a la necessitat comunicativa i al receptor, amb ordre, claredat i prou detall, tot aplicant-hi correctament els coneixements lingüístics pel que fa a lèxic, ortografia i estructures morfosintàctiques.	**L14a** Discurs	–[1]	42%
	L14b Correcció	–[1]	43%
SC21 Buscar i seleccionar informació de diverses fonts.	**SC21a** Textual	78%	89%
	SC21b Visual	41%	61%
SC33 Treballar en equip per a dur a terme una tasca.	**SC33a** Organització	81%	97%
	SC33b Interacció	90%	97%
	SC33c Resultat	58%	58%
	SC33d Reflexió crítica	83%	97%
	SC33e Satisfacció	95%	99%

A: la supera d'una manera consistent.
B: la supera d'una manera suficient.
(1) No s'ha aplicat el criteri A per les característiques de les activitats avaluades (vegeu el comentari sobre l'expressió escrita en la pàg. 20).

Comentaris dels resultats

Àmbit matemàtic

• Els resultats **més satisfactoris** s'obtenen en les competències referides a:

– Comparar la factibilitat de fets aleatoris en situacions simples (M9), atès que l'alumnat ha realitzat sense dificultats el càlcul senzill de temps per preveure càlculs i combinacions horàries per a xatejar entre ciutats (situades en zones corresponents a fusos horaris diferents) i ha realitzat de manera satisfactòria, en grup, l'anàlisi, classificació i representació de dades a partir de les activitats amb els daus.

– Planificar i seguir estratègies de resolució de problemes i modificar-les si no es mostren prou eficaces (M5). Aquesta competència, que implica un procés complex de presa de decisions, ha estat associada a activitats amb bons resultats: càlcul de les diferències horàries entre ciutats i tractament de les dades obtingudes en l'activitat amb els daus. Tanmateix, aquesta competència ha estat també associada a altres activitats els resultats de les quals no han estat tan bons, activitats que implicaven càlculs amb diferents unitats de mesura: el càlcul de superfícies, la representació d'itineraris i el càlcul de l'IVA en una situació real de canvi de divises.

• La competència en què l'alumnat mostra un nivell d'assoliment intermedi, que s'hauria de consolidar durant la resta de l'etapa, és la que fa referència a:

– Usar i interpretar llenguatge matemàtic com ara xifres, signes i altres representacions gràfiques per a descriure fenòmens habituals (M6b i M6c). L'alumnat realitza satisfactòriament l'evolució temporal d'un experiment, la representació d'un diagrama de barres senzill, la lectura simple d'un gràfic (climograma) i la interpretació directa dels valors d'un gràfic, però té dificultats per a extreure informació a partir de gràfics i per a fer operacions combinades.

– Aplicar el coneixement del sistema de numeració decimal i de les operacions per a comparar, relacionar nombres i operar amb rapidesa, buscant segons la situació un resultat exacte o aproximat (M1). L'alumnat té uns resultats satisfactoris quan realitza la comparació directa de mesures, reduccions a unitats, càlcul de diferències horàries senzilles i canvi de monedes. Presenta, en canvi, dificultats per a llegir mapes i corbes de nivell i calcular volums i percentatges. També presenta dificultats per a fer operacions horàries que impliquin equivalències, per a fer descomposicions en diferents unitats (hores i minuts), per a interpretar i utilitzar informació d'un text de cara a resoldre qüestions senzilles i per a llegir números fraccionaris.

– Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià, en particular en casos de proporcionalitat directa (M8). L'alumnat té dificultats per a utilitzar informació d'un text de cara a resoldre qüestions senzilles i calcular l'IVA, i sumar-lo o restar-lo quan correspongui, amb el que això suposa d'interpretació de la proporcionalitat i càlcul amb decimals. L'alumnat també ha manifestat dificultats d'interpretació de la proporcionalitat a l'hora de comprovar els resultats de diferents ampliacions d'una fotografia. Tanmateix, realitza satisfactòriament relacions entre temps i temperatura i, com ja s'ha dit, el canvi de moneda sempre que impliqui una operació senzilla.

• L'assoliment ha estat baix en les competències que fan referència a:

– Usar tècniques de representació geomètrica per a descriure, raonar i projectar canvis en les formes i en els espais (M2). L'alumnat, com es constata en altres competències, té dificultats per a orientar-se, com també per a fer la representació gràfica plana de volums senzills i de conceptes bàsics de geometria com, per exemple, el de perímetre.

– Usar i interpretar llenguatge matemàtic com ara dibuixos per a descriure fenòmens habituals (M6a) per la dificultat que suposa l'orientació en l'espai. L'alumnat és capaç d'interpretar un mapa, però no d'orientar-s'hi, i d'utilitzar una quadrícula per a calcular una superfície.

– Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressió de quantitat, identificació de nombres, temps, mesura i intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques (M7). Es constata que l'alumnat té dificultats per a efectuar més de dues operacions combinades o encadenades, passar una expressió fraccionària a forma no fraccionada, fer una resta horària no directa i calcular l'IVA. I també es ratifica que l'alumnat realitza satisfactòriament la reducció a unitats i la representació d'un gràfic de barres, així com també la interpretació horària de diferents zones de la terra (fusos horaris) i la interpretació de distàncies en un mapa.

– Usar amb propietat instruments i tècniques per a dibuixar, mesurar i calcular (M4). L'alumnat té resultats poc satisfactoris quan ha de calcular volums i formes a partir de la mesura de superfícies, desenvolupar en forma plana una figura senzilla com, per exemple, un cub, mesurar a partir d'un plànol la superfície d'una habitació, ampliar i reduir figures planes (és a dir, proporcionalitats) i obtenir la taula de freqüències d'una prova aleatòria. En canvi, és capaç d'obtenir de manera aproximada una distància, representar un diagrama de barres i els valors obtinguts en una prova aleatòria.

– Emprar amb precisió i criteri les unitats de mesura (M3). L'alumnat presenta dificultat en elegir el trajecte en una gràfica, comparar quantitats donades en unitats diferents, relacionar diferents unitats de mesura, fer operacions combinades d'unitats, mesurar superfícies a partir d'una unitat donada i mesurar perímetres. L'alumnat obté resultats satisfactoris a l'hora de comparar quantitats en les mateixes unitats, reduir a la unitat i calcular distàncies en valors numèrics.

• Respecte al 2002 i el 2004 són especialment destacables els baixos resultats en l'ús d'instruments i unitats de mesura i en la interpretació de la funció dels nombres i del llenguatge matemàtic en contextos reals i a partir de representacions gràfiques.

• Els resultats evidencien que es manté un assoliment de les competències similar al d'anys anteriors. Com ja s'havia palesat en el 2002 i el 2004 i com també s'evidencia en l'estudi PISA 2003, les aplicacions de la matemàtica a la vida real i l'exercitació dels processos de matematització són estratègies que s'han de consolidar més en l'ensenyament obligatori.

• Com a resultats més positius cal dir que han millorat els resultats en el tractament matemàtic de fets aleatoris i en la planificació d'estratègies per a la resolució de problemes.

Àmbit lingüístic

• En general, el percentatge d'assoliment de competències de l'àmbit lingüístic aplicades en contextos matemàtics ha estat baix. L'alumnat ha presentat sobretot dificultats per a argumentar i raonar respostes i necessita treballar més l'aplicació de la informació que li proporciona un text per a resoldre un problema i els aspectes de correcció en la producció d'un text escrit. Tant les activitats de comprensió com les d'expressió han estat molt relacionades amb textos científics amb requisits clars de precisió i argumentació correcta.

• Pel que fa a la comprensió lectora, la resposta correcta a diferents preguntes de comprensió de textos implicava càlculs o representació de probabilitat a partir de fraccions, circumstància que fa difícil diferenciar les dificultats lingüístiques de les de representació o ús de les matemàtiques.

• Pel que fa a l'expressió escrita, l'activitat més llarga (redacció d'un text per a un correu electrònic) estava ubicada al final d'un dels quaderns i la seva resposta podia venir condicionada per la fatiga i la manca de temps. Altres activitats d'expressió escrita demanaven l'elaboració d'una conclusió argumentada a partir de diverses dades.

• Respecte a les competències avaluades els anys 2002 i 2004, hi ha hagut una disminució. Cal dir, però, que les activitats de comprensió i expressió escrites enguany se circumscrivien a textos de tipus científic que exigeixen molta precisió en l'ús del llenguatge.

• També cal fer notar que enguany l'avaluació de les competències lingüístiques ha estat subsidiària de les competències de l'àmbit matemàtic. El seu plantejament en les diferents activitats proposades revela, però, l'interès educatiu de reforçar el domini d'unes competències bàsiques per a la vida des de les diferents àrees curriculars i la necessitat que aquestes siguin treballades des de totes les àrees.

Àmbit social i científic

• Els resultats més positius s'obtenen en les competències referides a:

  - aspectes de satisfacció, interacció, reflexió crítica i organització del treball en equip per a dur a terme una tasca (SC33a, SC33b, SC33d i SC33e).

  - buscar, seleccionar, organitzar i analitzar informació de fonts textuals (SC21a).

- Les competències en què l'alumnat mostra un nivell d'assoliment intermedi són les que fan referència al resultat de treballar en equip (SC33c) i buscar, seleccionar, organitzar i analitzar informació de fonts visuals per definir un itinerari i orientar-se (SC21b).

- Respecte a l'any 2002, s'observa un augment en l'assoliment de la competència SC21a, referida a buscar, seleccionar, organitzar i analitzar informació de fonts textuals. En canvi, s'aprecia una davallada en l'assoliment de la competència SC21b, que correspon a buscar, seleccionar, organitzar i analitzar informació d'una font visual i que inclou les activitats referides a un itinerari que impliquen orientació en uns recorreguts complexos.

- S'ha d'insistir a l'alumnat en l'observació, anàlisi i experimentació amb objectes del seu entorn per tal de garantir la funcionalitat en el coneixement en l'àmbit social i el científic.

Diferències de resultats segons hàbitat i nivell socioeconòmic

No es donen diferències estadísticament significatives entre els diferents hàbitats analitzats. Tan sols seria digna de menció la influència de l'hàbitat en les competències SC33a i SC33b.

En canvi, el nivell socioeconòmic de la zona on estan ubicats els centres sí que ha incidit en els percentatges de l'alumnat que ha assolit la majoria de competències. Les diferències, en general, no són significatives entre l'alumnat de nivell socioeconòmic alt i mitjà, però es donen diferències significatives entre l'alumnat de zones de nivell socioeconòmic mitjà i baix en algunes competències.

Les diferències més remarcables entre els tres nivells socioeconòmics es donen en les competències M2, M6a, M6c, M8, L11, L14b, SC21b, SC33b i SC33c.

Resultats de cada competència amb relació als factors d'hàbitat i nivell socioeconòmic

A continuació es presenten els resultats obtinguts pels centres agrupats amb relació als factors d'hàbitat i nivell socioeconòmic.

Si es combinen els factors hàbitat (poblacions inferiors a 10.000 habitants; poblacions d'entre 10.001 i 100.000 habitants; poblacions de més de 100.000 habitants) i nivell socioeconòmic (baix, mitjà, alt —només en poblacions de més de 10.000 habitants—), s'obté l'esquema següent de tipologies de centres per a aquest estudi (en cada casella s'indica el quadre que conté les dades corresponents):

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><th colspan="3">Hàbitat</th></tr>
<tr><th>1.000-10.000 h.</th><th>10.001-100.000 h.</th><th>més de 100.000 h.</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Nivell socioeconòmic</td><th>Baix</th><td rowspan="3">Quadre 1</td><td>Quadre 2</td><td>Quadre 5</td></tr>
<tr><th>Mitjà</th><td>Quadre 3</td><td>Quadre 6</td></tr>
<tr><th>Alt</th><td>Quadre 4</td><td>Quadre 7</td></tr>
</table>

1. Centres en poblacions d'entre 1.000 i 10.000 habitants.
2. Centres en poblacions d'entre 10.001 i 100.000 habitants i nivell socioeconòmic baix.
3. Centres en poblacions d'entre 10.001 i 100.000 habitants i nivell socioeconòmic mitjà.
4. Centres en poblacions d'entre 10.001 i 100.000 habitants i nivell socioeconòmic alt.
5. Centres en poblacions de més de 100.000 habitants i nivell socioeconòmic baix.
6. Centres en poblacions de més de 100.000 habitants i nivell socioeconòmic mitjà.
7. Centres en poblacions de més de 100.000 habitants i nivell socioeconòmic alt.

Els resultats s'expressen en percentatges per tal de poder establir les comparacions pertinents.

Atès que per determinades circumstàncies específiques de l'equipament informàtic dels centres hi ha hagut dificultats per a l'aplicació de la prova TIC o bé per a la recollida de les respostes en suport informàtic, s'ha optat per presentar també els resultats, sense les activitats amb ordinador, de totes aquelles competències on aquestes activitats estaven incorporades. Els resultats de les competències referides a l'àmbit matemàtic sense les activitats TIC (i en funció dels criteris d'assoliment corresponents) es mostren al final de cada taula i s'indiquen amb un asterisc.

Quadre 1: Centres en poblacions d'entre 1.000 i 10.000 habitants

Àmbit matemàtic	A	B
M1	51%	60%
M2	32%	54%
M3	48%	55%
M4	49%	55%
M5	62%	78%
M6a	39%	53%
M6b	59%	79%
M6c	59%	76%
M7	43%	57%
M8	52%	77%
M9	72%	88%

Àmbit lingüístic	A	B
L11	49%	64%
L14a	– (1)	46%
L14b	– (1)	48%

Àmbit social i natural	A	B
SC21a	78%	88%
SC21b	47%	64%
SC33a	76%	98%
SC33b	88%	97%
SC33c	61%	61%
SC33d	80%	96%
SC33e	94%	99%

Àmbit matemàtic sense TIC	A	B
M1*	49%	58%
M2*	20%	33%
M3*	53%	58%
M4*	34%	44%
M6a*	44%	63%
M6b*	53%	78%

Àmbit social i natural sense TIC	A	B
SC21b*	49%	64%

(1) No s'ha aplicat el criteri A per les característiques de les activitats avaluades (vegeu el comentari sobre l'expressió escrita en la pàg. 20).

Quadre 2: Centres en poblacions d'entre 10.001 i 100.000 habitants i nivell socioeconòmic baix

Àmbit matemàtic	A	B
M1	28%	35%
M2	18%	36%
M3	27%	36%
M4	28%	38%
M5	46%	68%
M6a	31%	36%
M6b	40%	69%
M6c	54%	75%
M7	35%	50%
M8	39%	65%
M9	60%	81%

Àmbit lingüístic	A	B
L11	32%	50%
L14a	– (1)	34%
L14b	– (1)	26%

Àmbit social i natural	A	B
SC21a	74%	84%
SC21b	29%	48%
SC33a	79%	89%
SC33b	78%	94%
SC33c	28%	28%
SC33d	78%	100%
SC33e	97%	100%

Àmbit matemàtic sense TIC	A	B
M1*	40%	46%
M2*	17%	29%
M3*	43%	46%
M4*	28%	32%
M6a*	48%	67%
M6b*	49%	70%

Àmbit social i natural sense TIC	A	B
SC21b*	45%	63%

(1) No s'ha aplicat el criteri A per les característiques de les activitats avaluades (vegeu el comentari sobre l'expressió escrita en la pàg. 20).

Quadre 3: Centres en poblacions d'entre 10.001 i 100.000 habitants i nivell socioeconòmic mitjà

Àmbit matemàtic		
	A	B
M1	48%	55%
M2	32%	53%
M3	47%	54%
M4	42%	52%
M5	64%	79%
M6a	40%	52%
M6b	53%	74%
M6c	56%	76%
M7	42%	57%
M8	49%	73%
M9	76%	86%

Àmbit matemàtic sense TIC		
	A	B
M1*	49%	57%
M2*	25%	39%
M3*	53%	56%
M4*	35%	45%
M6a*	56%	72%
M6b*	50%	79%

Àmbit lingüístic		
	A	B
L11	47%	63%
L14a	– (1)	40%
L14b	– (1)	40%

Àmbit social i natural		
	A	B
SC21a	77%	88%
SC21b	39%	60%
SC33a	86%	97%
SC33b	89%	97%
SC33c	62%	62%
SC33d	84%	97%
SC33e	94%	97%

Àmbit social i natural sense TIC		
	A	B
SC21b*	47%	61%

(1) No s'ha aplicat el criteri A per les característiques de les activitats avaluades (vegeu el comentari sobre l'expressió escrita en la pàg. 20).

Quadre 4: Centres en poblacions d'entre 10.001 i 100.000 habitants i nivell socioeconòmic alt

Àmbit matemàtic		
	A	B
M1	57%	66%
M2	43%	70%
M3	57%	69%
M4	54%	68%
M5	75%	91%
M6a	51%	73%
M6b	66%	87%
M6c	60%	87%
M7	63%	74%
M8	65%	91%
M9	88%	94%

Àmbit lingüístic		
	A	B
L11	67%	76%
L14a	– (1)	51%
L14b	– (1)	54%

Àmbit social i natural		
	A	B
SC21a	86%	93%
SC21b	58%	76%
SC33a	85%	98%
SC33b	92%	98%
SC33c	58%	58%
SC33d	84%	98%
SC33e	98%	99%

Àmbit matemàtic sense TIC		
	A	B
M1*	66%	76%
M2*	34%	50%
M3*	64%	69%
M4*	56%	69%
M6a*	59%	77%
M6b*	66%	92%

Àmbit social i natural sense TIC		
	A	B
SC21b*	69%	84%

(1) No s'ha aplicat el criteri A per les característiques de les activitats avaluades (vegeu el comentari sobre l'expressió escrita en la pàg. 20).

Quadre 5: Centres en poblacions de més de 100.000 habitants i nivell socioeconòmic baix

Àmbit matemàtic		
	A	B
M1	36%	38%
M2	22%	41%
M3	31%	41%
M4	30%	40%
M5	44%	61%
M6a	29%	43%
M6b	35%	63%
M6c	50%	71%
M7	29%	43%
M8	38%	61%
M9	62%	74%

Àmbit lingüístic		
	A	B
L11	28%	45%
L14a	– (1)	23%
L14b	– (1)	23%

Àmbit social i natural		
	A	B
SC21a	68%	83%
SC21b	25%	41%
SC33a	76%	93%
SC33b	91%	97%
SC33c	54%	54%
SC33d	88%	98%
SC33e	93%	98%

Àmbit matemàtic sense TIC		
	A	B
M1*	36%	43%
M2*	13%	25%
M3*	37%	45%
M4*	28%	36%
M6a*	39%	59%
M6b*	37%	60%

Àmbit social i natural sense TIC		
	A	B
SC21b*	30%	45%

(1) No s'ha aplicat el criteri A per les característiques de les activitats avaluades (vegeu el comentari sobre l'expressió escrita en la pàg. 20).

Quadre 6: Centres en poblacions de més de 100.000 habitants i nivell socioeconòmic mitjà

Àmbit matemàtic		
	A	B
M1	48%	56%
M2	25%	51%
M3	40%	52%
M4	44%	55%
M5	59%	80%
M6a	34%	49%
M6b	51%	79%
M6c	54%	74%
M7	39%	58%
M8	45%	75%
M9	72%	89%

Àmbit lingüístic		
	A	B
L11	47%	61%
L14a	– (1)	41%
L14b	– (1)	43%

Àmbit social i natural		
	A	B
SC21a	76%	88%
SC21b	39%	57%
SC33a	82%	97%
SC33b	91%	97%
SC33c	56%	56%
SC33d	81%	98%
SC33e	94%	99%

Àmbit matemàtic sense TIC		
	A	B
M1*	44%	55%
M2*	17%	32%
M3*	48%	53%
M4*	34%	42%
M6a*	50%	71%
M6b*	49%	78%

Àmbit social i natural sense TIC		
	A	B
SC21b*	44%	66%

(1) No s'ha aplicat el criteri A per les característiques de les activitats avaluades (vegeu el comentari sobre l'expressió escrita en la pàg. 20).

Quadre 7: Centres en poblacions de més de 100.000 habitants i nivell socioeconòmic alt

Àmbit matemàtic		
	A	B
M1	66%	79%
M2	49%	71%
M3	65%	76%
M4	57%	68%
M5	72%	83%
M6a	60%	71%
M6b	69%	91%
M6c	75%	88%
M7	61%	77%
M8	65%	88%
M9	83%	95%

Àmbit lingüístic		
	A	B
L11	70%	87%
L14a	– (1)	53%
L14b	– (1)	57%

Àmbit social i natural		
	A	B
SC21a	94%	97%
SC21b	54%	79%
SC33a	90%	100%
SC33b	93%	98%
SC33c	63%	63%
SC33d	87%	98%
SC33e	98%	99%

Àmbit matemàtic sense TIC		
	A	B
M1*	69%	81%
M2*	31%	46%
M3*	68%	76%
M4*	41%	50%
M6a*	64%	81%
M6b*	66%	93%

Àmbit social i natural sense TIC		
	A	B
SC21b*	63%	81%

(1) No s'ha aplicat el criteri A per les característiques de les activitats avaluades (vegeu el comentari sobre l'expressió escrita en la pàg. 20).

Valoracions fetes pels centres

Es va demanar als centres que valoressin determinats aspectes de les proves. En cada cas es feia una afirmació i calia indicar-ne el grau d'acord.

En primer lloc, es demanava una valoració en relació amb cadascuna de les proves. Les afirmacions eren:

- El tipus i grau de dificultat de les activitats és adequat a l'edat de l'alumnat.
- Les instruccions d'aplicació són clares i suficients.
- La informació que es dóna sobre el lligam de les activitats de les proves amb les competències és útil per a l'anàlisi dels resultats i la presa de decisions de millora.

A continuació, es demanava una valoració en relació amb el conjunt del procés. Les afirmacions, per a cadascun dels cicles, eren:

- L'aplicació de les proves focalitzades en un àmbit de les competències bàsiques facilita l'anàlisi i la reflexió sobre la gestió del currículum.
- La informació que proporciona l'aplicació informàtica facilita l'anàlisi i la reflexió sobre els resultats.

Les valoracions podien ser: 1 = molt poc, 2 = poc, 3 = bastant, 4 = molt

Per a cada qüestió es presenta la mitjana i la desviació típica, arrodonides a dues xifres decimals. Atès que la valoració mínima és 1 i la màxima és 4, el valor teòric de l'«aprovat» estaria a 2,5. Pel que fa a la desviació típica, és una mesura estadística de dispersió que indica la separació mitjana entre els diferents valors (les valoracions dels centres) i la mitjana. La forquilla de valors possibles té una amplitud de 3 (entre 1 i 4); per tant, tots els resultats obtinguts en les desviacions típiques s'han de posar en relació amb aquest valor de 3.

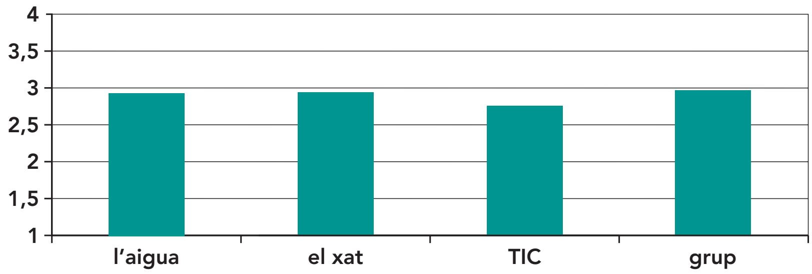
Resultats

Qüestions relatives a cada prova

• El tipus i grau de dificultat de les activitats és adequat a l'edat de l'alumnat

	Prova 1 (l'aigua)	Prova 2 (el xat)	Prova 3 (TIC)	Prova 4 (grup)
mitjana	2,92	2,92	2,75	2,97
desv. típica	0,41	0,49	0,64	0,61

Valoracions (percentatges)	1	1,7	1,6	4,2	2,7
	2	15,7	13,1	24,5	17,7
	3	71,9	71,1	62,9	59,6
	4	10,7	11,2	8,4	20,0



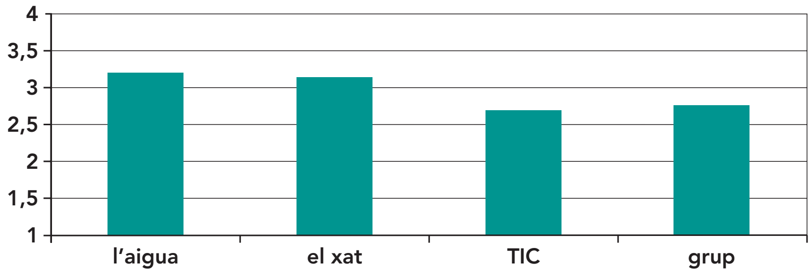
L'adequació de les activitats a l'edat de l'alumnat obté una qualificació força favorable, amb valors mitjans propers a «bastant». Tan sols la prova TIC queda una mica per sota de les altres; el fet que també sigui la prova que presenta una major desviació indica que, pel que fa a l'adequació a l'edat, hi ha disparitat de criteris. És destacable que la millor valoració s'obté en una prova força nova, la de grup; aquesta activitat és la que es considera més adequada a l'edat dels alumnes.

La dispersió ens mostra que hi ha major coincidència en la qualificació de les dues proves de format més clàssic, mentre que les més noves provoquen més discrepàncies.

• **Les instruccions d'aplicació són clares i suficients**

	Prova 1 (l'aigua)	Prova 2 (el xat)	Prova 3 (TIC)	Prova 4 (grup)
mitjana	3,16	3,15	2,69	2,78
desv. típica	0,61	0,67	0,88	0,86

Valoracions (percentatges)	1	1,6	1,8	10,8	8,3
	2	10,9	11,9	26,3	25,4
	3	57,2	55,8	45,4	46,6
	4	30,3	30,5	17,5	19,7



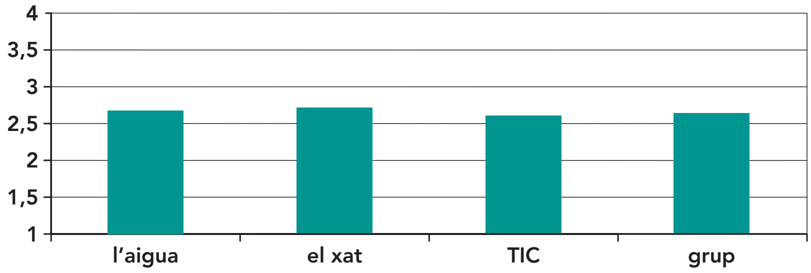
Aquí les valoracions són molt positives en les dues primeres proves, en què el procediment d'aplicació de les proves ja està molt interioritzat. La valoració de les instruccions baixa en la prova de grup i sobretot en la prova TIC, tot i que es manté folgadament sobre l'aprovat.

Les desviacions indiquen força discrepàncies entre centres respecte a les instruccions de les dues darreres proves, aspecte que els centres també van posar de relleu en les observacions que van fer arribar per escrit al Departament d'Educació.

• **La informació que és dóna sobre el lligam de les activitats de les proves amb les competències és útil per a l'anàlisi dels resultats i la presa de decisions de millora**

	Prova 1 (l'aigua)	Prova 2 (el xat)	Prova 3 (TIC)	Prova 4 (grup)
mitjana	2,70	2,71	2,58	2,61
desv. típica	0,64	0,65	0,69	0,68

Valoracions (percentatges)	1	4,8	5,4	7,9	7,5
	2	29,7	27,9	33,8	32,4
	3	55,9	56,8	50,6	51,5
	4	9,6	10,0	7,7	8,6

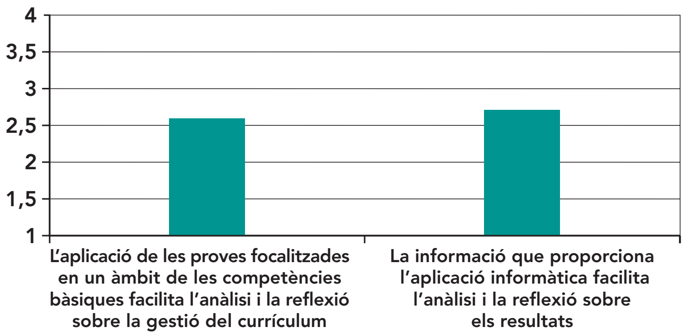


Aquest apartat és el que globalment obté valoracions més baixes, tot i que estan força per sobre de l'aprovat. L'apreciació és força similar entre les quatre proves i les desviacions també, fet que sembla indicar que la utilitat de les proves per a la presa de decisions de millora no es considera separadament en cada prova sinó de forma global. Cal recordar que aquestes opinions han estat emeses abans que els centres disposessin del document *Orientacions per a l'anàlisi dels resultats en els centres*, per la qual cosa és d'esperar que la valoració final d'aquest apartat que facin els centres sigui encara més positiva.

Qüestions globals

	L'aplicació de les proves focalitzades en un àmbit de les competències bàsiques facilita l'anàlisi i la reflexió sobre la gestió del currículum	La informació que proporciona l'aplicació informàtica facilita l'anàlisi i la reflexió sobre els resultats
mitjana	2,61	2,71
desv. típica	0,78	0,73

Valoracions (percentatges)			
	1	8,7	6,9
	2	30,4	27,9
	3	52,1	52,6
	4	8,8	12,6



La primera qüestió entronca amb l'anterior, en què ja s'ha vist que els centres analitzaven de forma global el paper de les proves en els processos d'avaluació interna dels centres. En tot cas, l'augment de la dispersió podria indicar una certa discussió sobre la bondat de focalitzar les proves en un àmbit en comptes de fer-les més extensives com en edicions anteriors. L'aplicació informàtica es valora millor, però indubtablement la valoració sobre la seva utilitat està condicionada per la valoració global sobre la utilitat del procés d'avaluació de les competències bàsiques en els processos d'avaluació interna.

Pel que fa a les observacions aportades pels centres docents amb referència al contingut general de les proves, hi ha força opinions favorables a la tipologia d'activitats, però també crítiques perquè en alguns ítems les proves plantegen un tipus de treball (interdisciplinari, cooperatiu) que no forma part de la pràctica habitual dels centres. Cal recordar respecte a això que un dels objectius de les proves és fer una funció modelitzadora que amplïi el ventall d'activitats que es treballen amb l'alumnat.

Quant a aspectes lligats a activitats concretes, és remarcable el nombre de centres que opinen que la prova 1 (l'aigua) era massa llarga, la qual cosa impossibilitava que bona part de l'alumnat pogués fer l'activitat d'expressió escrita en condicions. Aquesta qüestió serà objecte de reflexió per al Departament d'Educació, i ha comportat que en les competències L14a i L14b només s'avaluï el criteri B (suficiència).

No hi ha pràcticament incidències referides a la prova 2 (el xat).

La prova 3 (TIC) és, de bon tros, la que suscita més comentaris. Força centres assenyalen les dificultats tècniques que van tenir en el procés d'instal·lació i aplicació. Deixant de banda qüestions tècniques, es considera que les instruccions per a la instal·lació i per a la posterior recuperació de dades eren insuficients o confuses. El Departament d'Educació farà una revisió a fons d'aquests procediments per tal de millorar-los.

Pel que fa al model de prova TIC que s'hauria d'utilitzar, alguns centres proposen que se superi el quadern virtual i es treballi en línia, mentre que d'altres són partidaris de continuar utilitzant el suport paper i que l'ordinador sigui només una eina auxiliar.

La prova 4 (grup) ha generat força comentaris favorables, tot i que alguns aspectes concrets n'han estat qüestionats. Els més esmentats són: la gestió dels grups és complicada, algunes orientacions són insuficients, alguns criteris d'avaluació són massa estrictes o no acaben de concordar amb el que es desprèn de l'enunciat, les agrupacions d'alumnes entre classes diferents són de difícil gestió amb l'aplicació informàtica. Tots aquests aspectes seran objecte de revisió en futures proves.

III. Orientacions per a la millora

Orientacions per a l'anàlisi de resultats en els centres

Tant el procés d'anàlisi dels resultats de les proves com les decisions que es prenguin al final del procés han d'anar orientats al mateix objectiu: aconseguir una millora en l'adquisició de les competències bàsiques avaluades. En aquest sentit, el procés d'anàlisi de resultats requereix preguntes, davant els resultats obtinguts, com ara: què es pot fer per millorar?, què cal millorar i per a què?

Aquesta tipologia de preguntes demana una modalitat de treball basada en la reflexió i el diàleg en el si de l'equip docent de centre i s'ha d'abordar no solament des de protocols o tècniques merament quantitatius, sinó també amb metodologies qualitatives, és a dir, metodologies orientades a la comprensió dels processos educatius.

Aquí rau la importància del treball reflexiu entre els docents i de les deliberacions i acords compartits, sia sobre el propi treball o sobre les condicions en què es dóna. Aquestes actuacions hauran de conduir cap a una millor comprensió dels problemes i, per tant, facilitar la presa de decisions orientada a la reelaboració de les pràctiques professionals si així calgués.

La reflexió de cada professor, després de passar i corregir les proves, és un primer nivell d'avaluació interna des de la perspectiva individual de cada docent. Aquest és un punt imprescindible sense el qual no es poden fonamentar canvis de més abast. Però els canvis que s'espera que es generin, a partir de l'anàlisi dels resultats de l'avaluació dels alumnes, haurien de situar-se més enllà de l'aula i del professor per a implicar-hi l'equip docent del curs i el claustre.

És convenient que un petit grup o comissió, del qual ha de formar part l'equip directiu, s'encarregui de la potenciació i dinamització del procés de reflexió i de presa de decisions. Aquest petit grup o comissió hauria de fer una primera anàlisi de resultats i preparar-ne la presentació al claustre. Posteriorment caldria que organitzés el procés de reflexió i discussió en el si dels equips docents. Per a fer-ho, hauria de facilitar la informació de manera que ajudés a orientar la reflexió i la presa de decisions tant a nivell transversal dins el curs com a nivell vertical de centre.

Els resultats de les proves: com analitzar-los

Un cop introduïdes les dades de les respostes de l'alumnat en l'aplicació informàtica (full de càlcul Excel) facilitada en la pàgina web **www.gencat.net/educacio/depart/cb14mes.htm**, es pot obtenir de manera automàtica la informació següent:

- el total de respostes correctes del grup classe per a cada ítem,
- els resultats per grup classe amb relació a l'assoliment de cada una de les competències bàsiques avaluades (valors absoluts i percentatge d'assoliment),

- els resultats de cada alumne en cada ítem agrupats per competències (valor absolut i percentatge d'assoliment),
- el resum percentual de centre i el gràfic corresponent, amb les dades de cada grup.

En el segon apartat d'aquest document (pàg. 14) hi ha la síntesi de resultats obtinguts per una mostra representativa de centres.

Tota aquesta informació es proposa a fi de facilitar diferents tipus d'anàlisi en el si dels centres.

Anàlisi amb els referents interns

Amb la informació recollida en cada un dels fulls de l'aplicació informàtica, el centre pot analitzar els resultats obtinguts a nivell d'alumne, de grup i de centre.

Per començar, es recomana fer una valoració global dels resultats de les proves. Els fulls amb els gràfics poden facilitar aquesta primera anàlisi.

Per a dur a terme aquest tipus d'anàlisi és convenient tenir presents els resultats anteriors que es van obtenir al centre en les proves de cursos anteriors. A partir d'aquí es poden proposar hipòtesis explicatives del perquè dels resultats. El fet de proposar hipòtesis explicatives és una tasca que comporta comprensió, reflexió i creativitat.

Per a ajudar a formular hipòtesis pot resultar útil:

- Comparar els resultats obtinguts en el curs 2005-2006 amb els resultats anteriors de les mateixes competències. Observar si hi ha correlacions o discrepàncies i reflexionar sobre el motiu que les pot originar.
- Focalitzar l'anàlisi dels resultats d'alguna o algunes de les competències en què enguany s'hagin obtingut resultats no satisfactoris. Comparar aquests resultats amb els d'aquelles competències en què s'han obtingut els resultats més bons, revisar la gestió curricular que se'n fa (insistència amb què es treballen, temporització, tipologia d'activitats que es presenten, metodologia emprada, etc.). Probablement l'anàlisi d'aquestes dades pot aportar pistes a l'hora de prendre les decisions per a millorar l'adquisició d'aquelles competències bàsiques que no hagin estat satisfactòries.

Aquest treball de reflexió hauria de servir no tan sols per a arribar a acords sobre de quina o quines competències caldria millorar l'adquisició, sinó també per a sensibilitzar els professors respecte a la necessitat d'encetar un procés de revisió sobre la gestió curricular d'aquestes competències, a fi d'introduir els canvis necessaris per a obtenir una millora.

Per a facilitar la revisió proposada, caldria veure quins són els continguts que intervenen en l'avaluació de cada una de les competències. A continuació es pot revisar amb quines activitats s'avaluen les competències seleccionades. Per a fer-ho, es pot utilitzar el quadre de la pàgina 185, on es relaciona cada competència bàsica amb les activitats que s'han dissenyat per avaluar-la.

Un cop identificats els continguts i les activitats amb què es mesuren les competències, es proposa:

- constatar si es treballen tots els continguts i de manera suficient,
- reflexionar sobre com treballar els continguts perquè puguin esdevenir elements al servei de l'adquisició de les competències.

En l'apartat «Orientacions per a la presa de decisions de millora» d'aquest mateix document, es donen orientacions en aquest sentit.

Anàlisi amb els referents externs

Amb la síntesi de resultats dels centres de la mostra (apartat II, pàg. 14) es poden interpretar els resultats propis en relació amb els de la mostra de centres de Catalunya i amb els resultats del grup de centres de característiques similars. Aquesta anàlisi haurà de servir per a tenir un referent extern que validi o reorienti la valoració que s'ha fet en l'anàlisi interna.

Finalment aquest petit grup o comissió hauria de coordinar la posada en comú i l'elaboració de les propostes a nivell de centre, que haurien de presentar-se al claustre per a la seva aprovació i s'haurien de recollir en els documents de centre corresponents.

Orientacions per a la presa de decisions de millora

Un cop analitzats els resultats obtinguts en les proves del centre i després d'haver-los confrontat amb els referents externs que aporten les dades dels centres de la mostra, cal que s'encetin, dins el marc de l'avaluació interna, processos orientats a aconseguir una millora en l'adquisició de les competències bàsiques.

S'entén per *competència* la capacitat d'usar funcionalment els coneixements i habilitats en contextos diferents, i implica comprensió, reflexió i discerniment, tenint en compte la dimensió social de les actuacions. Per tant, la competència és acció, i és precisament en l'aplicació dels coneixements i les habilitats que una persona podrà demostrar la seva competència.

Per a poder posar en funcionament els coneixements i les habilitats de manera que evidenciïn competència, serà necessari que aquests coneixements i habilitats s'hagin adquirit també d'una manera determinada. Així, caldrà que s'adquireixin de manera funcional, des de contextos diferents, que hi hagi comprensió en la seva adquisició, i també reflexió i discerniment per a poder aplicar els que calgui quan calgui. Així mateix és necessari tenir en compte la dimensió social de la competència, atès que la seva adquisició es fa juntament amb els altres i s'ha d'exercir tenint en compte els altres.

Els continguts (conceptuals, procedimentals i actitudinals) que hi ha al darrere dels quatre sabers que conformen cada una de les competències (saber, saber fer, saber ser i saber estar) són els continguts definits en el currículum, i el que cal és treballar-los de manera que l'alumne els pugui aplicar, quan calgui, evidenciant ser una persona competent. Per tot això, és important proporcionar a l'alumnat contextos d'aprenentatge adequats, presentant activitats que facilitin l'aprenentatge dels continguts de manera que puguin esdevenir components de la competència que es pretén que adquireixin.

És ben cert que hi ha tipologies d'activitats més adequades que d'altres per a facilitar l'adquisició de les competències, però un dels aspectes clau per a la seva adquisició serà com es treballa; així, serà en la metodologia on realment s'orientarà el treball vers l'adquisició de les competències.

En aquest document s'aporten orientacions per a la reflexió sobre com caldria treballar les matemàtiques per a facilitar l'adquisició de les competències bàsiques. Tot i que cada competència s'avalua per mitjà de diverses activitats, el treball s'ha focalitzat en l'anàlisi **d'una de les activitats de cada una de les competències** de les proves del curs 2005-2006 i es donen pautes sobre com caldria treballar-ne els continguts que s'hi presenten per tal de facilitar l'adquisició de les competències.

S'han seleccionat les activitats amb els criteris següents: activitats amb continguts que es consideren clau, tant per al desenvolupament personal de l'alumne com per a la continuïtat dels aprenentatges, i activitats que dins de cada competència han obtingut resultats menys satisfactoris en els centres de la mostra.

Per a cada una de les activitats seleccionades es presenten exemples de respostes donades pels alumnes que han realitzat la prova, acompanyades de comentaris que mostren que no hi ha una única via per a arribar a la solució correcta d'una activitat, de la mateixa manera que una solució incorrecta pot indicar una gran desorientació o simplement una confusió o una manca de precisió.

L'anàlisi d'aquestes respostes ens proporciona elements indicadors de les dificultats i dels progressos dels alumnes en el seu procés d'aprenentatge i, per tant, podrà servir d'orientació a l'hora de prendre decisions sobre les actuacions que cal dur a terme per millorar-ne els resultats.

Aquests exemples s'acompanyen d'unes orientacions referides tant a aspectes de continguts com de metodologia que pretenen promoure la reflexió del professorat. Així mateix es proposen qüestionaris per a ajudar a promoure el debat i l'adopció de propostes de millora a nivell de centre.

Activitats seleccionades

Àmbit	Competències	Activitats seleccionades
Numeració i càlcul	**M1** **M4** **M7**	Act. 6: L'estalvi d'aigua Act. 8: Quan es poden comunicar tots dos? Act. 14: Limitem les hores de xat Act. 11: La bateria de la càmera
Canvi i relacions	**M8**	Act. 3: La composició de l'aigua Act. 15: El canvi de moneda Act. 10: La fotografia
Espai i forma	**M2** **M4**	Act. 4: Construïm dos pluviòmetres
Mesura	**M3** **M4(part)**	Act. 9 (apt. 3): Com és la teva habitació?
Interpretació i ús del llenguatge matemàtic	**M6**	Act. 1: Experiència al laboratori Act. 2 (apt. 6): L'excursió Act. 13: Com és el teu país?
Resolució de problemes	**M5**	Act. 2 (apt. 4): Excursió a la muntanya Act. 10 (apt. 2): La fotografia Act. 20: Els daus

Numeració i càlcul

Introducció

Per a avaluar els aspectes relacionats amb la numeració i el càlcul, que queden recollits en les competències M1, M4 i M7, les proves Cb14 comptaven amb una sèrie d'activitats, de les quals se n'han seleccionat quatre: tres amb nombres enters i una quarta amb fraccions.

Totes les activitats seleccionades tenen en comú que el càlcul no és el fi últim de l'activitat, sinó que hi apareix com a procediment de resolució. De les tres activitats seleccionades amb nombres enters, dues es refereixen al càlcul amb hores i minuts, i l'altra utilitza càlculs amb unitats enteres però del sistema mètric decimal. A continuació es relacionen les activitats:

Activitat 6: L'estalvi d'aigua
Aquesta activitat requereix càlculs directes o amb diferents operacions combinades (en un dels casos en un marc prealgebraic determinat per la computació de valors en una fórmula expressada verbalment) com a pas previ per a la presa de decisions, la comparació i la classificació.

Activitat 8: Quan es poden comunicar tots dos?
Es tracta d'interpretar el paper que fan uns nombres en un context, els fusos horaris, conegut pels alumnes des de l'àrea de ciències socials, per tal de calcular hores simultànies entre dues ciutats.

Activitat 14: Limitem les hores de xat
Les taules de valors són un instrument visual i clar que apareix en moltes situacions de la vida quotidiana. En el context, la taula de valors expressa temps en hores i minuts, i correspon a les durades de diferents connexions per xat. Cal completar la taula on falten diverses dades i argumentar si, un cop vistes les dades numèriques, han disminuït les hores de connexió a partir d'un cert dia.

Activitat 11: La bateria de la càmera
Es tracta d'aplicar el concepte de fracció per a expressar la càrrega de bateria d'una càmera digital i al mateix temps relacionar la càrrega de la bateria amb les hores que queden de funcionament. Caldrà calcular la fracció complementària d'una fracció, la fracció d'una quantitat total i viceversa, un total coneixent una part i la fracció que representa.

Per tal d'analitzar les dificultats que presenten els alumnes en resoldre cadascuna d'aquestes activitats, s'ha fet una tria de respostes correctes i incorrectes i s'ha intentat veure quina estratègia hi ha al darrere de cada resposta.

Atès que en les proves no es demanava als alumnes que justifiquessin les respostes, ni tan sols que mostressin les operacions realitzades, observant-ne les respostes s'han fet diverses hipòtesis sobre les possibles estratègies de resolució, que finalment s'han contrastat amb entrevistes individuals a alguns alumnes resolutors.

Activitat 6

S'analitza només l'apartat 3 de l'activitat 6, que és un exemple d'un petit problema resoluble amb les quatre operacions bàsiques (suma, resta, multiplicació i divisió) i amb nombres enters. La solució és única i tancada, però permet diferents plantejaments com es mostra en els exemples triats.

L'ESTALVI D'AIGUA

L'Albert i la seva amiga Maria volen comparar el consum d'aigua de les seves famílies a les respectives cases. Mirant els rebuts de l'aigua observen que en els dos últims mesos (61 dies) la família de l'Albert ha consumit 30 m^3 i la de la Maria 25 m^3.

1 Quina és la família més estalviadora si a casa de l'Albert viuen 4 persones i a casa de la Maria en viuen 3?

....

2 La fórmula següent els permet calcular el consum diari d'aigua per persona:

$$\text{El consum (en litres) diari per persona} = \frac{\text{núm. de m}^3\text{ facturats x 1000 litres}}{\text{núm. de dies facturats x núm. de persones}}$$

L'ajuntament del poble de l'Albert classifica el consum segons la taula següent:

Consum mitjà = 123 litres consumits per persona i dia

Més de 145 litres per persona i dia.
La teva família ha de procurar estalviar aigua, és una família malbaratadora.

Entre 130 i 145 litres per persona i dia.
La teva família no llença indiscriminadament l'aigua però el seu consum és elevat.

Entre 100 i 130 litres per persona i dia.
La teva família està en el camí de l'estalvi!

Entre 70 i 100 litres per persona i dia.
Sou una família estalviadora.

En quina d'aquestes categories inclouries la família de la Maria?

- És malbaratadora i ha de procurar estalviar aigua. ☐
- No llença indiscriminadament l'aigua però el seu consum és elevat. ☐
- Està en el camí de l'estalvi. ☐
- És estalviadora. ☐

3 Si s'instal·la un joc d'airejadors i un limitador de cabal es pot arribar a estalviar fins a 50 litres per dia i persona. Quantes garrafes de 5 litres d'aigua estalviaria en un any una persona?

Resposta 1

3 Si s'instal·la un joc d'airejadors i un limitador de cabal es pot arribar a estalviar fins a 50 litres per dia i persona. Quantes garrafes de 5 litres d'aigua estalviaria en un any una persona?

Estalviarie 3650 garrafes de 5 litres

L'alumne contesta correctament. No hi ha cap operació ni anotació que deixi veure el procés seguit.

Resposta 2

3 Si s'instal·la un joc d'airejadors i un limitador de cabal es pot arribar a estalviar fins a 50 litres per dia i persona. Quantes garrafes de 5 litres d'aigua estalviaria en un any una persona?

10 garrafes per dia / 70 garrafes per alumne / 3650 garrafes per any

L'alumne dóna una idea molt clara de l'estratègia que ha seguit. No necessitava calcular les garrafes setmanals, però segurament això li ha servit per fer-se una idea ell mateix del procediment de càlcul que calia seguir. És un gran exemple de comprensió de la situació i de domini del sentit numèric.

Resposta 3

3 Si s'instal·la un joc d'airejadors i un limitador de cabal es pot arribar a estalviar fins a 50 litres per dia i persona. Quantes garrafes de 5 litres d'aigua estalviaria en un any una persona?

Omplirà 3650 ampolles de 5 litres cada persona

$50 \cdot 365 = 18250$

$18250 : 5 = \boxed{3650}$

És una altra manera d'enfocar l'activitat. L'alumne calcula els litres d'aigua anuals que s'estalvien i després, a partir dels litres, calcula quantes garrafes necessita per a posar-los-hi. És enormement curiós el terme «omplirà» quan, de fet, no s'omple res, s'estalvia, deixa de rajar.

La resposta 2 i la 3 donen dues estratègies diferents de resolució de l'activitat. És interessant disposar d'exemples d'activitats que tenen diferents vies de resolució.

Resposta 4

3 Si s'instal·la un joc d'airejadors i un limitador de cabal es pot arribar a estalviar fins a 50 litres per dia i persona. Quantes garrafes de 5 litres d'aigua estalviaria en un any una persona?

1,825 litres

És el resultat de multiplicar 50 per 365 (litres totals) i després treure'n un 0, pensant que les garrafes eren de 10 litres, o simplement l'estudiant ha buscat els litres totals, s'ha deixat el zero del darrere i no ha fet el darrer pas per a calcular el nombre de garrafes. Curiosament aquesta resposta és molt més freqüent del que caldria esperar.

Resposta 5

3 Si s'instal·la un joc d'airejadors i un limitador de cabal es pot arribar a estalviar fins a 50 litres per dia i persona. Quantes garrafes de 5 litres d'aigua estalviaria en un any una persona?

10 garrafes de 5 litres.

L'alumne ha calculat les garrafes per dia, s'ha limitat a fer $\frac{50}{5}=10$. Potser li calia tornar-se a llegir l'enunciat.

Una altra resposta enormement freqüent. En alguns casos pot ser deguda simplement al fet d'haver llegit massa de pressa l'enunciat; però en altres pot amagar una constant en el procediment d'alguns alumnes: «Quina operació toca? Una de sola, no caldria sinó!» (resposta ràpida i llestos).

Resposta 6

3 Si s'instal·la un joc d'airejadors i un limitador de cabal es pot arribar a estalviar fins a 50 litres per dia i persona. Quantes garrafes de 5 litres d'aigua estalviaria en un any una persona?

3660 garrafes

És un error de càlcul? Un any té 366 dies? Sí, quan és un any de traspàs, o en té 360 per aproximació, tampoc no ve d'un dia! Denota més aviat badada que incomprensió del problema? Podríem dir que són «efectes paràsits del qüestionament escolar». Un d'aquests efectes és que allò que es pregunta a l'escola no té res a veure amb el que correspondria si es preguntés fora de l'escola. Tothom sap que un any té 365 dies, però quantes vegades a l'aula donem poca importància a tot això! Quantes vegades fem simplificacions de la realitat (lícites en el cas concret en què ho fem) i donem carta blanca perquè l'alumnat faci simplificacions similars, toqui o no toqui en aquell moment, i alhora pensi això: «A classe les coses no funcionen com a fora: aquí són vàlides unes coses i a fora unes altres.»

Resposta 7

3 Si s'instal·la un joc d'airejadors i un limitador de cabal es pot arribar a estalviar fins a 50 litres per dia i persona. Quantes garrafes de 5 litres d'aigua estalviaria en un any una persona?

~~[illegible] litres/any.~~ ~~[illegible]~~ litres. ~~garrafes de 5 litres~~

123 - 50 = 73 l/dia. 73 · 365 = 26.645 litres/any. 26.645 : 5 = 5.329 garrafes de 5 litres

L'alumne compta els dies i la capacitat de les garrafes correctament. El que falla aquí és que ha plantejat malament l'estalvi diari. No és tant un problema de càlcul com de comprensió global de l'enunciat: 123 és el consum que apareix al quadre de dalt, del qual en resta 50, que és l'estalvi; és com si parléssim de preus i l'alumne fes: total - descompte = el que queda.

Ha associat l'operació de restar a la idea d'estalvi. Havia de fer una resta per a buscar l'estalvi i no ha sabut veure que l'estalvi ja es donava en l'enunciat; un problema, per tant, de comprensió global de la situació.

Activitat 8

L'hora concreta (local) d'un lloc de la terra i la mesura de la durada d'un determinat esdeveniment són dues situacions quotidianes que donen context al càlcul amb hores i minuts i alhora exemplifiquen la necessitat d'utilitzar un sistema de numeració no decimal. El càlcul de l'hora local també és un procediment que es treballa des de l'àrea de ciències socials, en parlar dels fusos horaris. S'ha optat per incloure'l en aquesta relació per afavorir la interpretació de les matemàtiques com a matèria instrumental present en diferents àrees del currículum.

QUAN ES PODEN COMUNICAR TOTS DOS?

Com que en Marc sabia que la diferència horària entre les dues ciutats és força gran, per trobar una hora apropiada per al xat en Marc va decidir buscar «fus horari» al Google i, després d'interpretar tota la informació, va decidir que amb aquesta en tenia prou.

Quan a Mont-real són les 7:00 h...

... a Terrassa són les 13:00 h

1 Quan són les 21:00 a Mont-real, quina hora és a Terrassa?

....

2 Cada dia en Marc surt de casa a les 8:00 per anar a l'institut i torna a casa a les 13:30. A la tarda se'n va a les 14:30 i torna a les 17:30. Se'n va a dormir a les 23:00 i es lleva a les 7:00. La Brigitte fa el mateix horari que en Marc, però a l'hora de Mont-real.

Marca amb una **X** la resposta correcta de cada apartat.

a. És possible que la Brigitte xategi amb en Marc de 22:00 a 23:00, hora de Mont-real, abans d'anar a dormir?

És possible, tant ella com en Marc estan disponibles. ☐

És impossible, en Marc està dormint. ☐

b. És probable que la Brigitte xategi amb en Marc de 14:00 a 14:30, hora de Mont-real?

És poc probable, a aquesta hora en Marc és a classe d'educació física. ☐

És molt probable, a aquesta hora poden xatejar tots dos i ho fan sovint. ☐

c. És possible que en Marc xategi amb la Brigitte de 20:00 a 20:30, hora local de Catalunya?

És possible, a aquesta hora la Brigitte pot xatejar. ☐

És impossible, a aquesta hora la Brigitte és a l'escola. ☐

Tot i que aquesta activitat conté l'estructura bàsica d'un problema (entendre la situació, concebre un pla, executar-lo i examinar la solució obtinguda), s'ha incorporat a l'apartat de càlcul perquè la

NUMERACIÓ I CÀLCUL

situació que presenta és prou coneguda per l'alumnat d'aquesta etapa i, per tant, perd la categoria de problema. La primera qüestió, el càlcul de l'hora de Terrassa, és un pas necessari per a la segona, la probabilitat de connexió, però respondre correctament la primera qüestió no garanteix la resolució correcta de la segona, segons mostren els exemples seleccionats.

Les respostes tancades en forma de creueta no permeten gaires deduccions, però s'han completat les respostes, i les hipòtesis sobre l'estratègia que comportaven, amb algunes entrevistes als mateixos alumnes resolutors.

En aquesta activitat no és convenient parlar de càlcul ni analitzar els errors o encerts des d'aquesta dimensió, sinó que convé parlar de dificultats de la comprensió del sistema de numeració i de la comprensió adequada de la situació.

Resposta 1

1 Quan són les 21:00 a Mont-real, quina hora és a Terrassa?

A Terrassa són les 3:00 h

2 Cada dia en Marc surt de casa a les 8:00 per anar a l'institut i torna a casa a les 13:30. A la tarda se'n va a les 14:30 i torna a les 17:30. Se'n va a dormir a les 23:00 i es lleva a les 7:00. La Brigitte fa el mateix horari que en Marc, però a l'hora de Mont-real.

Marca amb una **X** la resposta correcta de cada apartat.

a. És possible que la Brigitte xategi amb en Marc de 22:00 a 23:00, hora de Mont-real, abans d'anar a dormir?

És possible, tant ella com en Marc estan disponibles. ☐

És impossible, en Marc està dormint. ☒

b. És probable que la Brigitte xategi amb en Marc de 14:00 a 14:30, hora de Mont-real?

És poc probable, a aquesta hora en Marc és a classe d'educació física. ☐

És molt probable, a aquesta hora poden xatejar tots dos i ho fan sovint. ☒

c. És possible que en Marc xategi amb la Brigitte de 20:00 a 20:30, hora local de Catalunya?

És possible, a aquesta hora la Brigitte pot xatejar. ☒

És impossible, a aquesta hora la Brigitte és a l'escola. ☐

Es contesten correctament tot els apartats.

Resposta 2

1 Quan són les 21:00 a Mont-real, quina hora és a Terrassa?

són les 3:00h

2 Cada dia en Marc surt de casa a les 8:00 per anar a l'institut i torna a casa a les 13:30. A la tarda se'n va a les 14:30 i torna a les 17:30. Se'n va a dormir a les 23:00 i es lleva a les 7:00. La Brigitte fa el mateix horari que en Marc, però a l'hora de Mont-real.

Marca amb una **X** la resposta correcta de cada apartat.

a. És possible que la Brigitte xategi amb en Marc de 22:00 a 23:00, hora de Mont-real, abans d'anar a dormir?

És possible, tant ella com en Marc estan disponibles. ☐

És impossible, en Marc està dormint. ☒

b. És probable que la Brigitte xategi amb en Marc de 14:00 a 14:30, hora de Mont-real?

És poc probable, a aquesta hora en Marc és a classe d'educació física. ☐

És molt probable, a aquesta hora poden xatejar tots dos i ho fan sovint. ☒

c. És possible que en Marc xategi amb la Brigitte de 20:00 a 20:30, hora local de Catalunya?

És possible, a aquesta hora la Brigitte pot xatejar. ☐

És impossible, a aquesta hora la Brigitte és a l'escola. ☒

L'alumne contesta correctament el primer apartat i els dos primers ítems del segon. Com que en els dos primers ítems de l'apartat 2 calia sumar les 6 h de diferència per a trobar la nova hora local, es podria pensar que aquí també ho ha fet, quan en realitat calia restar les 6 h perquè s'havien intercanviat les ciutats. Sembla, doncs, que l'alumne més o menys té clara una estratègia i no té problemes per a aplicar-la, però sí que té problemes de raonament, ja que ha fet una resta quan calia fer una suma.

S'ha confirmat la hipòtesi de treball de l'alumne a través d'una entrevista en què es va veure que continuava restant quan havia de sumar.

Resposta 3

a. És possible que la Brigitte xategi amb en Marc de 22:00 a 23:00, hora de Mont-real, abans d'anar a dormir?

És possible, tant ella com en Marc estan disponibles. ☐

És impossible, en Marc està dormint. ☒

b. És probable que la Brigitte xategi amb en Marc de 14:00 a 14:30, hora de Mont-real?

És poc probable, a aquesta hora en Marc és a classe d'educació física. ☒

És molt probable, a aquesta hora poden xatejar tots dos i ho fan sovint. ☐

c. És possible que en Marc xategi amb la Brigitte de 20:00 a 20:30, hora local de Catalunya?

És possible, a aquesta hora la Brigitte pot xatejar. ☒

És impossible, a aquesta hora la Brigitte és a l'escola. ☐

Ara l'error apareix en el segon ítem.

Resposta 4

a. És possible que la Brigitte xategi amb en Marc de 22:00 a 23:00, hora de Mont-real, abans d'anar a dormir?

És possible, tant ella com en Marc estan disponibles. ☐

És impossible, en Marc està dormint. ☒

b. És probable que la Brigitte xategi amb en Marc de 14:00 a 14:30, hora de Mont-real?

És poc probable, a aquesta hora en Marc és a classe d'educació física. ☒

És molt probable, a aquesta hora poden xatejar tots dos i ho fan sovint. ☐

c. És possible que en Marc xategi amb la Brigitte de 20:00 a 20:30, hora local de Catalunya?

És possible, a aquesta hora la Brigitte pot xatejar. ☐

És impossible, a aquesta hora la Brigitte és a l'escola. ☒

L'error apareix en els dos darrers ítems de l'apartat 2.

Totes dues respostes tenen en comú haver contestat correctament l'hora local, però contenen errors en el segon apartat. Trobar una diferència horària de 6 h és assequible per a 2n d'ESO, però no garanteix que s'hagi entès el sentit global de la situació. Amb les entrevistes s'ha constatat que, en no entendre la situació global, alguns alumnes responen a l'atzar entre les dues opcions possibles.

NUMERACIÓ I CÀLCUL

Resposta 5

1 Quan són les 21:00 a Mont-real, quina hora és a Terrassa?

4:00 de la matinada

L'alumne calcula malament la diferència horària, s'equivoca d'una hora i aquest error duu a respondre 4 en lloc de 3. És un error realment sorprenent que s'ha trobat prou sovint. En preguntar als alumnes com ho havien fet, s'ha constatat que la diferència horària la calculen amb els dits i compten una hora més, 7 hores en lloc de 6: un dit per a les set, un altre per a les 8 i així successivament fins a set dits, el darrer coincidint amb les 13 h.

Resposta 6

1 Quan són les 21:00 a Mont-real, quina hora és a Terrassa?

A Terrassa són les 15:00 h

En lloc de sumar 6 a 21, resta aquesta xifra i per això obté 15. Manca sentit de la situació, ha perdut de vista que Terrassa és més a l'est que Mont-real.

Resposta 7

1 Quan són les 21:00 a Mont-real, quina hora és a Terrassa?

Són l'1:00.

La resposta que l'alumne dóna correspon a l'hora que marca el rellotge. No ha calculat res.

Quines operacions hi ha al darrere d'aquesta activitat? Quina estratègia segueixen els alumnes que ho resolen correctament? Les respostes tancades en forma de creueta no permeten gaires deduccions, però s'han completat amb algunes entrevistes.

L'estratègia comuna observada per a resoldre aquesta activitat ha estat :

Estratègia per a calcular l'hora local

1. Calcular la diferència horària entre les dues ciutats.
2. Sumar la diferència horària.
3. Reduir a una hora compresa entre 0-24 perquè el resultat del càlcul era 27.

Estratègia per a saber si es poden connectar

1. Utilitzar la diferència trobada entre les ciutats en l'apartat anterior.
2. Decidir si cal sumar la diferència horària o cal restar-la segons la ciutat de què parlem. En els dos primers ítems calia sumar (s'anava de Mont-real a Terrassa) i en el darrer, restar. Aquí és on s'observaven més errors perquè segurament molts alumnes continuaven sumant.
3. Un cop trobada l'hora local de la segona ciutat, consultar què fa l'altre internauta en aquell moment.

Activitat 14

Les taules de valors són un instrument visual i clar que apareix en moltes situacions de la vida quotidiana. En el context, la taula de valors expressa temps en hores i minuts, i correspon a les durades de diferents connexions per xat. Cal completar la taula on falten diverses dades i argumentar si, un cop vistes les dades numèriques, han disminuït les hores de connexió a partir d'un cert dia. S'analitzen només la taula i els errors de càlcul que hi apareixen.

LIMITEM LES HORES DE XAT

Fa uns dies que a casa d'en Marc estan esverats perquè es passa moltes hores connectat a Internet, de vegades gairebé quatre hores. Finalment, després d'un diàleg intens, en Marc arriba al compromís següent:

«D'acord. A partir del proper dilluns, 19 de setembre, em connectaré com a màxim una hora cada dia.»

Per a fer el seguiment els pares li fan omplir una graella amb les hores que s'havia connectat darrerament i les hores que es connectarà a partir d'ara.
Uns dies després del pacte en Marc ensenya la graella següent als seus pares per demostrar-los que està complint el seu compromís.

1 Completa la graella amb les dades que falten:

dia	inici	final	durada
dijous, 15 de setembre	20:15	21:45	....
divendres, 16 de setembre	19:20	....	3 hores
dissabte, 17 de setembre	....	12:00	2 hores 10 min
diumenge, 18 de setembre	10:50	14:10	....
dilluns, 19 de setembre	19:45	20:25	....
dimarts, 20 de setembre	20:15	....	1 hora
dimecres, 21 de setembre	....	21:10	50 minuts

En general s'observa que la majoria d'alumnes saben quan han de sumar o restar. Tenen clars uns significats des de la perspectiva semàntica (inici + durada = final; o bé, final – inici = durada), però tenen problemes amb el càlcul en el sistema de numeració no decimal que s'utilitza per a la mesura d'hores i minuts.

S'analitzen diversos casos.

Resposta 1

1 Completa la graella amb les dades que falten:

dia	inici	final	durada
dijous, 15 de setembre	20:15	21:45	1'30
divendres, 16 de setembre	19:20	22:20	3 hores
dissabte, 17 de setembre	9:50	12:00	2 hores 10 min
diumenge, 18 de setembre	10:50	14:10	3h 20 min
dilluns, 19 de setembre	19:45	20:25	40 min
dimarts, 20 de setembre	20:15	21:15	1 hora
dimecres, 21 de setembre	20:20	21:10	50 minuts

No sabem com ho ha fet: no hi havia espai per als càlculs, però totes les respostes són correctes.

Resposta 2

S'han triat diverses respostes d'alumnes que només erraven el quart ítem d'entre tots els 7:

diumenge, 18 de setembre	10:50	14:10	3 hores, 10 min

3 hores 10 minuts: les hores són correctes, però els minuts no. Completa els 10 minuts de 10:50 fins a 11:00, però després no afegeix els 10 de 14.10.

diumenge, 18 de setembre	10:50	14:10	4 hores 20 min

4 hores 20 minuts: ara són correctes els minuts, però no les hores. A primera vista pot semblar que de 10 a 14 n'hi van 4 i per això ha posat un quatre, però... probablement ha entès bé que la situació fa que la resta no ve donada per «treure», sinó per «completar» (bona manera de veure-ho; de fet, l'única) i el problema és que «completa» per separat.

diumenge, 18 de setembre	10:50	14:10	1 hora 20 min

1 hora 20 minuts: són correctes els minuts, però no les hores. Tanmateix, a diferència del cas anterior, l'error és més contundent: des d'abans de les 11 fins més enllà de les 14 no pot haver-hi només 1 hora i minuts. L'alumne no ha repassat gens el resultat.

En general, aquí l'alumne ha demostrat que coneix l'estratègia adequada (restar l'hora inicial de la final) però que té problemes a l'hora de calcular la diferència en unes unitats de sistema no decimal. De fet, si el sistema fos decimal no ens hauríem adonat que aquests nois i noies potser no tenen prou interioritzats els procediments mentals de la resta.

Resposta 3

dia	inici	final	durada
dijous, 15 de setembre	20:15	21:45	1:30
divendres, 16 de setembre	19:20	21:30	3 hores
dissabte, 17 de setembre	9:50	12:00	2 hores 10 min
diumenge, 18 de setembre	10:50	14:10	3:10
dilluns, 19 de setembre	19:45	20:25	1:00
dimarts, 20 de setembre	20:15	21:15	1 hora
dimecres, 21 de setembre	8:50	21:10	50 minuts

Alumne que mostra ser coherent i sap que ha de sumar i restar, però té problemes de càlcul en el sistema no decimal d'expressar les hores i els minuts; no sap veure la resta en el sentit de completar.

Calcula correctament la primera durada (1:30 h) i, en canvi, no és capaç de calcular-la bé en els altres casos (ítems 4 i 5), en què els minuts de l'hora inicial són més que els de l'hora final i cal calcular completant.

Calcula de manera incorrecta una hora final, quan la durada és de tres hores, però calcula correctament el cas més senzill, quan la durada és d'una hora. De les hores d'inici una està bé, la més senzilla de calcular per compleció, de 9:50 a 12:00; en canvi, no és capaç de calcular el darrer ítem, quan l'hora final té menys minuts que l'hora inicial. No ha assimilat, en definitiva, el càlcul de la resta per compleció.

Resposta 4

dia	inici	final	durada
dijous, 15 de setembre	20:15	21:45	1 hore 30 min
divendres, 16 de setembre	19:20	22:20	3 hores
dissabte, 17 de setembre	10:10	12:00	2 hores 10 min
diumenge, 18 de setembre	10:50	14:10	4 hores 20 min
dilluns, 19 de setembre	19:45	20:25	1 hora 45 min
dimarts, 20 de setembre	20:15	21:15	1 hora
dimecres, 21 de setembre	21:50	21:10	50 minuts

Tornem a tenir problemes calculant, especialment quan els minuts de l'hora final són inferiors als de l'hora inicial. La dificultat de càlcul fa arribar fins i tot a la incoherència que en el darrer ítem l'hora inicial que es dóna com a resposta és posterior a l'hora final.

Contestar 10:10 en el tercer ítem en lloc de 9:50 és força habitual. Mentalment comproven que de 10 a 12 hi van 2 h, que són les hores de durada, i que de 10 minuts a 00 n'hi van 10, que són els

10 min de la durada total, que és 2 h 10 min. S'han restat per separat les hores i els minuts, però en un dels dos casos els minuts s'han restat al revés. Això denota que l'alumne no té gaire clar el concepte de resta, ja que no té cap problema a canviar l'ordre.

Resposta 5

dia	inici	final	durada
dijous, 15 de setembre	20:15	21:45	1:30 h.
divendres, 16 de setembre	19:20	22:20	3 hores
dissabte, 17 de setembre	9:10	12:00	2 hores 10 min
diumenge, 18 de setembre	10:50	14:10	3h 6 min
dilluns, 19 de setembre	19:45	20:25	10 min.
dimarts, 20 de setembre	20:15	21:15	1 hora
dimecres, 21 de setembre	20:6	21:10	50 minuts

Una estratègia de càlcul errònia:

10:50	20:6
+ 3:6	+ 50
13:110	20:110

I a continuació en els dos casos 110 es transforma en 1h 10 minuts, és a dir, 13:110 és el mateix que 14:10 , i 20:110 és el mateix que 21:10. Els càlculs realitzats, amb l'aparició del 110, suggereixen que l'alumne treu o posa zeros en els minuts segons convingui, de la mateixa manera que els zeros de la dreta d'una xifra decimal. Així, 3 h 6 min seria el mateix que 3 h 60 min, cosa que li permetria fer l'operació de l'esquerra. L'alumne sap quina operació ha de fer, però torna a tenir problemes comptant les hores i els minuts, que utilitzen un sistema d'unitats no decimals.

Resposta 6

dia	inici	final	durada
dijous, 15 de setembre	20:15	21:45	2 hores
divendres, 16 de setembre	19:20	21:40	3 hores
dissabte, 17 de setembre	10:10	12:00	2 hores 10 min
diumenge, 18 de setembre	10:50	14:10	5 hores
dilluns, 19 de setembre	19:45	20:25	2h 10m
dimarts, 20 de setembre	20:15	21 15	1 hora
dimecres, 21 de setembre	2030	21:10	50 minuts

Aquí l'alumne també té problemes a l'hora de fer els càlculs i podríem dir que fa càlculs aproximats. Per exemple, de 20:15 a 21:45, com que s'hi ha estat més d'una hora, posa 2 hores. Aconsegueix, en canvi, respostes correctes en els dos darrers ítems, quan es treballa amb 1 h de durada o amb durades que estan per sota d'1 hora, en què només cal comptar els minuts perquè les hores són les mateixes.

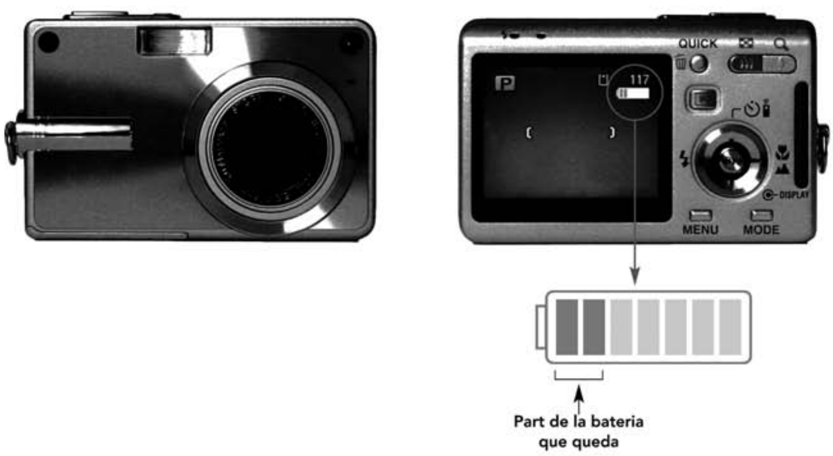
De tots els exemples es desprèn que la formulació implícita **hora d'inici + durada = hora final** és clara en tots els casos analitzats. Les dificultats apareixen a l'hora d'efectuar càlculs en un sistema no decimal: hi ha confusió entre el paper que juguen els 60 minuts, que s'intercanvien amb el 100; així 110 minuts acaben essent 1 hora i 10 minuts. Sembla també prou interioritzat que s'han de calcular les hores i els minuts per separat, però aleshores s'observen problemes quan els minuts d'una hora final són menors que els minuts de l'hora inicial. Fallen els procediments mentals de compleció, encara no els tenen assolits.

Activitat 11

En aquesta activitat l'alumne no ha de fer operacions complicades: la fracció apareix com a recurs per a expressar la part d'un total i alhora com a operador que permet trobar una part del total i viceversa, un total coneixent-ne la part i la fracció que representa. El context és familiar per a l'alumne, ja que es parla de la bateria d'una càmera digital i, com en les altres dues activitats anteriors, el sistema de numeració és el propi de les hores i els minuts.

LA BATERIA DE LA CÀMERA

Després d'haver estat fent algunes fotos, en Marc observa quanta càrrega de bateria li queda a la càmera fotogràfica:



1 Quina fracció de la càrrega de la bateria ha gastat?

....

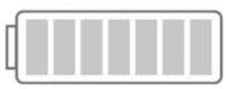
2 Si la bateria tingués una autonomia màxima de 2 hores i 20 minuts, quin seria el temps màxim que li queda?

....

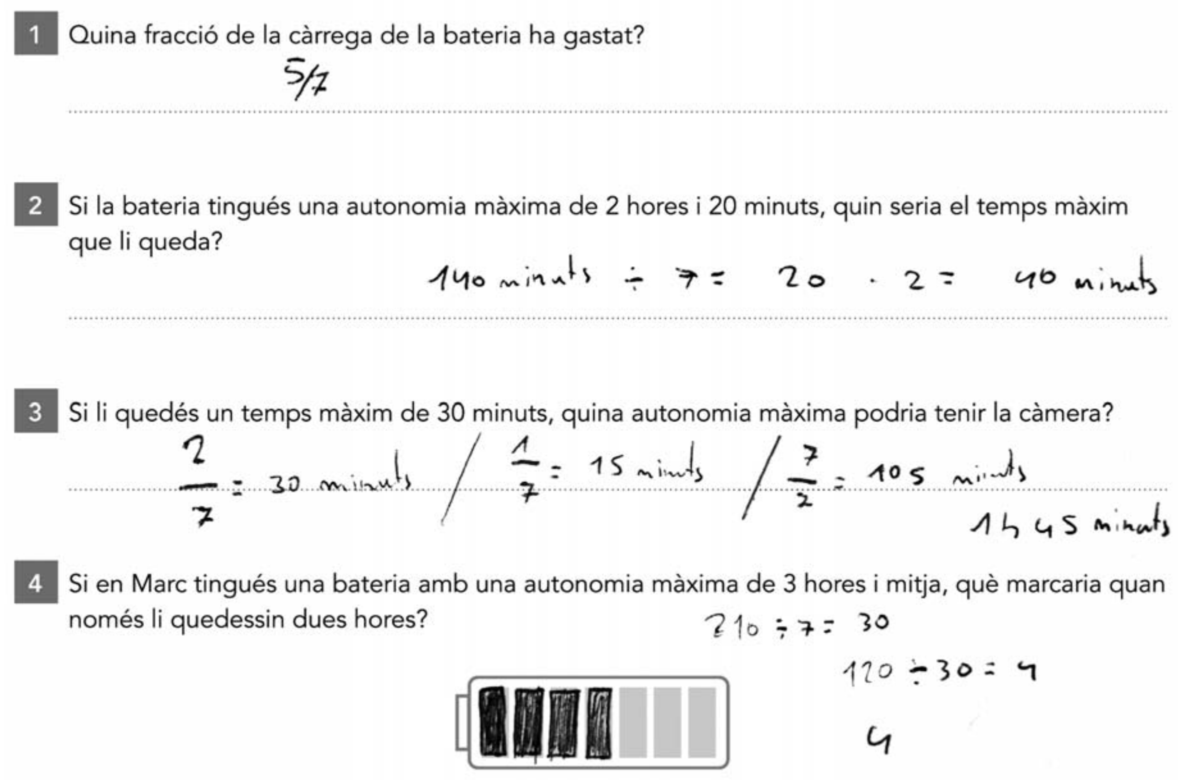
3 Si li quedés un temps màxim de 30 minuts, quina autonomia màxima podria tenir la càmera?

....

4 Si en Marc tingués una bateria amb una autonomia màxima de 3 hores i mitja, què marcaria quan només li quedessin dues hores?



Resposta 1



1 Quina fracció de la càrrega de la bateria ha gastat?

5/7

2 Si la bateria tingués una autonomia màxima de 2 hores i 20 minuts, quin seria el temps màxim que li queda?

140 minuts ÷ 7 = 20 · 2 = 40 minuts

3 Si li quedés un temps màxim de 30 minuts, quina autonomia màxima podria tenir la càmera?

$\frac{2}{7}$ = 30 minuts / $\frac{1}{7}$ = 15 minuts / $\frac{7}{2}$ = 105 minuts

1 h 45 minuts

4 Si en Marc tingués una bateria amb una autonomia màxima de 3 hores i mitja, què marcaria quan només li quedessin dues hores?

210 ÷ 7 = 30

120 ÷ 30 = 4

4

L'alumne contesta correctament tots els apartats i, a més, mostra molt clarament l'estratègia utilitzada.

Caldria, però, fer algunes consideracions sobre el procediment de resolució i l'escriptura utilitzada. En aquest sentit, en el segon apartat encadena operacions amb un igual, cosa que, des del punt de vista matemàtic, s'hauria de computar com a procediment incorrecte. En les consideracions finals caldrà parlar sobre el paper del signe *igual*.

Pel que fa a l'ítem 3, tot i que la idea és correcta, torna a aparèixer un error «d'ortografia matemàtica»:

$$\frac{2}{7} = 30 \text{ minuts}$$

NUMERACIÓ I CÀLCUL

Resposta 2

1 Quina fracció de la càrrega de la bateria ha gastat?

$\frac{5}{7}$

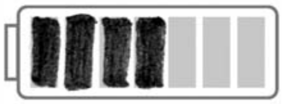
2 Si la bateria tingués una autonomia màxima de 2 hores i 20 minuts, quin seria el temps màxim que li queda?

0,66 h = 66 minuts

3 Si li quedés un temps màxim de 30 minuts, quina autonomia màxima podria tenir la càmera?

1 hora i 5 minuts

4 Si en Marc tingués una bateria amb una autonomia màxima de 3 hores i mitja, què marcaria quan només li quedessin dues hores?



L'alumne respon bé tant a la primera com a la darrera qüestió, però té problemes amb la segona i la tercera.

A la segona respon pensant que 0,66 h = 66 min. D'on ha sortit 0,66?

De $\frac{40}{60} = 0{,}66$

40 minuts és el resultat correcte; però, en considerar aquest resultat referit als minuts d'una hora, ha espatllat la resposta.

En la tercera resposta ens diu 1h i 5 min. Per què? En els càlculs ha obtingut 105 minuts; però, en voler-los passar a hores i minuts, 105 min $\longrightarrow$ 1h 5 min en lloc d'1 h 45 min.

En les dues respostes torna a aflorar un error provocat pel fet que els minuts no es compten en sistema decimal sinó sexagesimal.

NUMERACIÓ I CÀLCUL

Resposta 3

1 Quina fracció de la càrrega de la bateria ha gastat?

Ha gastat $\frac{5}{7}$

2 Si la bateria tingués una autonomia màxima de 2 hores i 20 minuts, quin seria el temps màxim que li queda?

li queda 20 minuts de bateria.

3 Si li quedés un temps màxim de 30 minuts, quina autonomia màxima podria tenir la càmera?

Podria tenir una autonomia de 3h:30m.

4 Si en Marc tingués una bateria amb una autonomia màxima de 3 hores i mitja, què marcaria quan només li quedessin dues hores?

L'alumne respon bé tant a la primera com a la darrera qüestió, però té problemes amb la segona i la tercera.

A la segona qüestió respon 20 minuts i a la tercera, 3h i 30 minuts. En tots dos casos l'error és el mateix: en lloc de treballar amb la dada que la part restant de bateria és 2/7, ho ha fet tot com si fos 1/7.

De $\dfrac{140 \text{ min}}{7}$ = 20 min, després calia multiplicar-ho per 2 i no ho ha fet.

30 min x 7 dóna les 3 h i 30 min, i ara ha oblidat dividir-ho per 2.

Aquí la dificultat no és, com en el cas anterior, el càlcul amb hores i minuts, sinó la interpretació del concepte de fracció.

Resposta 4

1 Quina fracció de la càrrega de la bateria ha gastat?

$\frac{5}{7}$

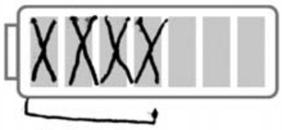
2 Si la bateria tingués una autonomia màxima de 2 hores i 20 minuts, quin seria el temps màxim que li queda?

$\frac{5}{7}$ de 140' = 100' li queden

3 Si li quedés un temps màxim de 30 minuts, quina autonomia màxima podria tenir la càmera?

135 '

4 Si en Marc tingués una bateria amb una autonomia màxima de 3 hores i mitja, què marcaria quan només li quedessin dues hores?



li queda
de bateria.

L'alumne respon bé la primera qüestió, però després calcula $\frac{5}{7}$ de 140 min quan, en realitat, hauria de calcular $\frac{2}{7}$ de 140 min.

Per què respon 135 min en lloc de 105 min? Observem que 135 = 105 + 30. Ha fet els seus càlculs correctament, però la interpretació és errònia perquè hi afegeix els 30 minuts que quedaven.

Per què suma el 30? El problema d'associar indiscriminadament una paraula a una operació sense tenir en compte el context i la situació que es planteja ja havia aparegut en l'activitat de les garrafes. Aquí l'associació que provoca l'error és: *quedar*, en sentit de romanent, i l'operació de sumar.

En l'altra activitat l'associació era: *descompte* i l'operació de restar.

Cal remarcar, tot i que no afecta el procediment de resolució, que l'alumne utilitza el símbol ' , propi de la mesura angular de minuts, en comptes del propi de la mesura de temps.

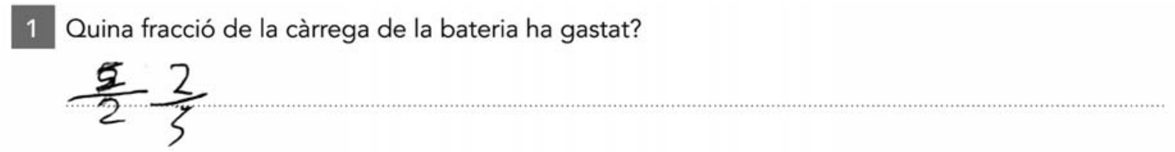
Resposta 5

Agrupem aquí tres respostes errònies a la primera qüestió. En tots tres casos les altres qüestions han tingut respostes errònies:


1 Quina fracció de la càrrega de la bateria ha gastat?

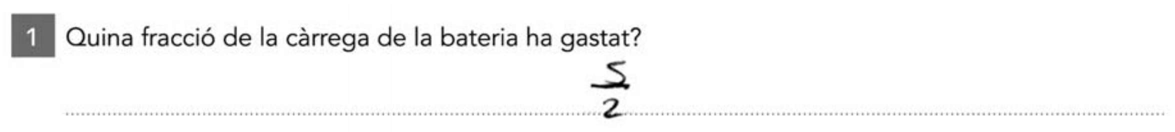
2/7 de Bateria

El $\frac{2}{7}$ indica que l'alumne té la idea de fracció i de la seva representació gràfica, però no ha entès que se li demanava la fracció complementària.


1 Quina fracció de la càrrega de la bateria ha gastat?

$\frac{\cancel{5}}{2}$ $\frac{2}{5}$

El $\frac{2}{5}$ revela que l'alumne ha comptat trossos, però no té clar el concepte de fracció i el paper del denominador com a total. Inicialment havia intercanviat numerador i denominador.


1 Quina fracció de la càrrega de la bateria ha gastat?

$\frac{5}{2}$

El $\frac{5}{2}$ reflecteix una situació semblant a l'anterior, però en aquest cas, a més, intercanviant el paper dels numeradors i denominadors de les fraccions.

D'aquests dos darrers casos es desprèn que, si l'alumne encara no és capaç d'interpretar la fracció com a expressió d'una part d'un total, és prematur esperar que utilitzi la fracció com a operador.

En general, s'observa que les quatre qüestions d'aquesta activitat tenen dos graus de dificultat diferent en relació amb el concepte de fracció. La primera i la darrera qüestions es refereixen a la fracció com a part d'un total: l'alumne en té prou d'associar una fracció a la part d'un total i saber-ne la representació gràfica corresponent; en canvi, les dues qüestions intermèdies utilitzen la fracció com a operador: cal calcular 2/7 d'una quantitat donada i després un total sabent a quina fracció correspon una part coneguda. La fracció com a representació d'una part gaudeix de més acceptació en l'alumnat d'aquesta etapa que la fracció com a operador. I, com en les activitats 8 i 14, un cop més apareix la dificultat de realitzar càlculs amb hores i minuts.

Algunes consideracions sobre el procés d'aprenentatge del càlcul

En l'anàlisi de les diferents activitats s'ha trobat que, a més de càlculs, apareixen estratègies, processos de resolució. El càlcul és l'eina que permetrà resoldre un problema, una situació plantejada, però hi ha un pas previ: entendre l'enunciat i el context per a poder decidir un pla i saber exactament quines operacions caldrà fer. En algunes de les respostes observades, els alumnes calculen correctament, però el que calculen no té relació amb el que han de trobar. Aquesta dificultat porta a parlar de la necessitat de desenvolupar en els alumnes estratègies per a estimar resultats i jutjar si els càlculs són raonables.

Un aspecte important que cal tenir present a l'hora de plantejar activitats és el fet que diferents camins poden dur a la solució correcta. En les respostes analitzades s'ha vist com diferents alumnes han utilitzat diferents camins per a arribar a la solució final amb èxit. Cal acostumar l'alumnat a treballar amb situacions que es resolguin per diferents camins, de manera que siguin capaços de comparar i avaluar les diferents estratègies tot distingint-ne els avantatges i inconvenients perquè finalment cada alumne incorpori la que li sigui més propera i li sembli més eficaç. En aquest procés d'aprenentatge és important, a més, fomentar la verbalització per part de l'alumnat, a fi que expliquin als companys (per parelles, en grup o davant tota la classe) com resolen les situacions plantejades.

En els diferents passos d'una resolució cal que l'alumne tingui consciència del que està calculant per a evitar que faci càlculs possibles amb els nombres que apareixen en l'enunciat però que no tenen cap mena de significat. Caldrà potenciar el sentit numèric i la comprensió del significat de les operacions.

En tractar amb quantitats, cal vetllar perquè l'alumne desenvolupi tots els vessants del raonament quantitatiu. Aquest raonament comporta:

- sentit numèric
- comprensió del significat de les operacions
- sentit de la magnitud dels nombres
- càlculs elegants
- càlcul mental
- estimacions

Tots aquests components apareixen d'una manera o altra en la resolució de les activitats analitzades i caldrà tenir-los presents a l'hora de cercar vies de millora.

Un aspecte paral·lel que reforça el sentit numèric són les unitats que acompanyen els nombres quan es treballa amb contextos del món real. A primera vista pot semblar que les unitats compliquen els càlculs, però no és així, les unitats ajuden a contextualitzar la situació, a fer-la més real. Les unitats informen sobre la coherència del resultat, sobre si el resultat que s'ha obtingut té sentit i és possible en el context en què s'està treballant o bé està fora de lloc.

El significat de les paraules en un text varia segons la situació i el context en què apareixen. Algunes paraules d'ús comú a la classe de matemàtiques tenen un altre significat en el llenguatge quotidià. Fins i tot a classe s'associen paraules concretes a operacions: per exemple, *més* per a la suma, *per* per a la multiplicació, etc. I llavors es corre el risc que l'alumne descontextualitzi i cada vegada, en trobar aquestes paraules, les associï automàticament a una operació determinada, sense acabar d'entendre-les en el context on apareixen. Per a evitar-ho, caldrà insistir en la necessitat de fer-se una idea global ben clara de tot el pla que s'ha decidit sense perdre de vista en cap moment, a l'hora de fer els càlculs intermedis, què és el que s'està buscant. En definitiva, cal aconseguir que l'alumne copsi el sentit de les operacions i no es quedi en el primer estadi d'associar una operació a una paraula.

Un altre problema relacionat amb el càlcul i la resolució de problemes són els errors que apareixen quan, en una activitat, se suposen conegudes pel lector algunes dades que realment no són conegudes per tots els alumnes als quals va dirigida l'activitat. En les activitats analitzades s'han observat casos en què l'alumne actuava com si desconegués alguna dada d'ús comú: per exemple, el nombre de dies que té un any. Aquesta mancança ha provocat un error en la resolució final, l'alumne ha operat com si l'any tingués 300 dies. L'alumne sabia quants dies té un any, aleshores quin mecanisme ha fallat i ha fet que no utilitzés la dada implícita correctament? Per a evitar aquests errors de contextualització i de connexions, cal una pràctica quotidiana de treball en contextos i molta insistència en l'hàbit de revisió del procés a l'hora de resoldre problemes per senzills que puguin semblar.

Els càlculs que es necessiten per a resoldre les activitats analitzades no són intencionadament complicats; la major dificultat apareix quan el sistema de numeració no és decimal. En tres dels quatre exemples comentats, la magnitud utilitzada és el temps que es mesura en un sistema no decimal: les hores i els minuts. Aquesta dificultat s'anirà superant a base de treballar diferents contextos on apareguin càlculs amb sistemes no decimals: el sistema sexagesimal per a la mesura dels temps i dels angles, el sistema binari relacionat amb els càlculs interns dels ordinadors, etc.

S'han observat errors de càlcul especialment quan en una diferència el minuend té un nombre de minuts inferior al subtrahend. Aquesta dificultat s'anirà resolent a mesura que l'alumnat entengui els significats de les operacions i utilitzi les relacions inverses entre la suma i la resta, la multiplicació i la divisió per a simplificar els càlculs i per a decidir quines operacions calen per a resoldre un problema. Per tal de treballar el significat i les connexions entre operacions recíproques, és convenient plantejar activitats que duguin a reflexionar sobre la relació entre les operacions. Per exemple: *Què passaria si, en lloc de sumar, restéssim en aquest context?*; o bé: *Busca una situació en què, per a resoldre-la, calgui realitzar aquestes operacions.*

Un context que apareix en algunes d'aquestes activitats i que dóna moltes possibilitats per a treballar la relació entre operacions inverses és el càlcul de les hores locals de punts geogràfics de la terra situats en diferents fusos horaris. Aquest càlcul és un exemple adequat per a parlar de la reciprocitat de la suma i la resta que es comentava en el paràgraf anterior perquè la relació entre l'hora local de les dues ciutats ve donada per una simple suma o resta, segons el sentit en què circulem per damunt del globus terraqüi. A més, és un context que prové de l'àrea de ciències socials, conegut per l'alumne i que evidencia el vessant instrumental de les matemàtiques.

Els quadres horaris que apareixen en una de les activitats analitzades són un exemple d'una manera de representar dades. Llegir-los, analitzar la relació entre les dades, completar-los, si és el cas, decidir quin tipus de quadre organitza millor les dades manipulades són activitats pròpies d'aquesta etapa, que contribueixen a desenvolupar la capacitat general d'usar, seleccionar i crear la representació més adequada per a cada procés matemàtic. Els quadres horaris per ells mateixos no resolen el problema, però, en organitzar les dades, ajuden a fer decidir quines operacions cal fer per a resoldre'l. Els càlculs caldrà realitzar-los després mentalment, per escrit o amb la calculadora. L'organització en quadre també permet, un cop s'han descobert les operacions que relacionen les diferents columnes, trobar les dades que falten amb un full de càlcul. S'utilitza així una eina que té moltes aplicacions en matemàtiques i en diferents àrees de currículum de l'ESO.

Un cop decidides les operacions que cal fer per a resoldre la situació plantejada, cal decidir com es fan aquests càlculs: mentalment, per escrit o amb la calculadora? Les tres vies no han de ser excloents, sinó complementàries. El càlcul mental és essencial i forma part de tot el bagatge que es necessita per a una bona comprensió del raonament que comporta la manipulació de quantitats. Sovint és una pràctica que s'abandona en començar l'ESO i que caldria recuperar a les aules.

El càlcul mental és una eina que es treballa des de les primeres etapes educatives i que cal mantenir a la secundària obligatòria i que, a més, enllaça amb una altra pràctica que també dóna suport al raonament quantitatiu, que és l'estimació. Per a poder avaluar si són raonables els resultats numèrics obtinguts, cal posseir un coneixement ampli de les quantitats i mesures del món real i alhora la capacitat per a estimar ràpidament l'ordre de magnitud. S'ha de ser capaç d'estimar que 33 x 613 donarà un resultat proper a 20.000 i, per a aconseguir-ho, és necessari un ús flexible i ràpid de la comprensió del valor posicional i de l'aritmètica d'una xifra.

Els alumnes d'aquesta etapa haurien d'arribar a ser hàbils en el treball amb fraccions, decimals i percentatges. Una sòlida comprensió de les diferents formes de representar les fraccions, els decimals i els percentatges és l'essència de la flexibilitat per a treballar amb els nombres racionals. Per aquesta raó sembla convenient en una primera fase, quan estem parlant del significat d'una fracció, treballar sobre diferents representacions gràfiques de les fraccions en els dos sentits, el reconeixement d'una fracció a partir de la representació gràfica i l'expressió d'una fracció en la representació gràfica més adequada per a cada situació.

En una segona fase les fraccions actuen d'operadors. Ara serà quan caldrà calcular una part d'un total o bé el total coneixent-ne una part i la fracció que li correspon. Són dues etapes consecutives, però la segona, la fracció com a operador, no serà possible si no està prou consolidada la fracció com a representació d'una relació amb un total. El treball amb fraccions és bàsic i previ a un concepte més ampli que s'introdueix en el primer cicle de l'ESO: la proporcionalitat. La relació entre la proporcionalitat i les fraccions és tractada àmpliament en l'apartat de «Canvi i relacions».

Les operacions amb fraccions són pròpies del primer cicle de l'ESO i els alumnes d'aquesta etapa tenen força dificultats per a resoldre-les. La calculadora és una eina eficaç de suport a uns càlculs insegurs i alhora també és una eina útil per a trobar propietats i relacions entre els termes d'una operació. També l'ordinador esdevé una eina important en l'aprenentatge del càlcul, sia per mitjà de la calculadora Wiris o bé per les diferents aplicacions especialment dissenyades per a l'aprenentatge del càlcul que es troben en la xarxa.

Les consideracions sobre l'aprenentatge del càlcul no poden ser només una sèrie de recomanacions entorn de les activitats i actituds, també cal considerar algunes qüestions generals sobre metodologia i gestió d'aula. Qualsevol activitat d'aprenentatge no queda totalment definida si no es parla de com es duu a terme a l'aula amb els alumnes. Hi ha accions que faciliten el protagonisme de l'alumnat en el seu aprenentatge. Sense ànim de fer una llista completa però amb la intenció de fer reflexionar sobre aquestes qüestions, se citen algunes accions possibles relatives a la metodologia i a la gestió de l'aula.

Les activitats d'aprenentatge estan dissenyades de manera que l'alumnat:

- cerqui pautes i models en diferents situacions amb la finalitat de treure'n conclusions aplicables a altres casos o situacions;
- analitzi, compari, contrasti i avaluï estratègies de resolució d'altres companys.

Els alumnes del grup classe treballen les activitats:

- de manera individual
- per parelles
- en grup
- en comú amb tota la classe

Sobre l'aprenentatge del càlcul com a eina per a resoldre problemes

El següent qüestionari permet al professorat:

- Analitzar les activitats que es porten a terme per a l'aprenentatge significatiu del càlcul com a eina per a resoldre problemes.
- Reflexionar sobre la metodologia més adient per a treballar en el marc de l'aula amb aquesta finalitat.
- Prendre acords i decisions sobre la gestió docent entre el professorat per afavorir l'aprenentatge del càlcul.

Es recomana que cada professor/a respongui aquest qüestionari individualment i que després, en una segona fase, es faci una posada en comú i es discuteixi en els departaments i en els equips docents a fi d'arribar a acords de millora.

Qüestionari

	A classe es proposen la realització d'activitats i el foment d'actituds com:	Molt sovint	Sovint	Alguna vegada	Gairebé mai
A	**Per a comprendre una situació**				
1	Analitzar el significat de les paraules, parant especial atenció a aquelles que tenen significats diferents en el llenguatge quotidià i en la classe de matemàtiques.				
2	Llegir quadres horaris i d'altres tipus per obtenir la informació necessària per a resoldre el problema.				
3	Organitzar les dades d'un text en un quadre que faciliti la visió global de la situació i la relació entre les dades.				
4	Cercar dades implícites en l'enunciat necessàries per a resoldre el problema.				
B	**Per a decidir un procés de resolució**				
5	Buscar pautes o models en altres situacions resoltes anteriorment.				
6	Estar obert a trobar diferents vies de solució i decidir quina és la més adequada per a cada situació.				
7	Atendre a la reciprocitat entre les operacions a l'hora de decidir quines operacions cal fer.				
8	Distingir el paper de les fraccions que apareixen en la situació plantejada (fracció com a part del total o fracció com a operador).				
9	Triar la representació gràfica més adequada quan calgui representar fraccions.				
10	Verbalitzar en petit grup o davant de tota la classe el pla concebut.				
C	**Per a fer els càlculs**				
11	Estimar mentalment el resultat (si és necessari, arrodonint dades i amb ordres de magnitud).				
12	Fer els càlculs amb les xifres i les unitats, vetllant per la coherència de les unitats resultants.				
13	Practicar el càlcul amb sistemes no decimals (temps, mesura d'angles...).				
14	Utilitzar la calculadora de manera habitual com a eina de suport per als càlculs.				
15	Utilitzar l'ordinador explorant-ne les diferents possibilitats: calculadora Wiris i altres recursos de la xarxa.				
D	**Per a revisar el resultat i treure'n conclusions**				
16	Comparar els resultats obtinguts amb les estimacions fetes prèviament.				
17	Analitzar i comparar diversos processos de resolució i resultats obtinguts per altres companys.				

Una vegada estudiats els resultats de la graella, els departaments i els equips docents poden plantejar-se preguntes i arribar a acords sobre:

- quines de les propostes es treballen a les aules?
- com es treballen?

- fins a quin punt les diferents metodologies emprades per cada departament faciliten l'aprenentatge?
- quines no es treballen prou?
- quines es consideren prioritàries?
- des de quines àrees es poden treballar?
- en quins aspectes es pot incidir més adequadament, tenint presents les característiques específiques de cadascuna de les assignatures implicades?

Es recomana triar-ne algunes entre les que es considerin prioritàries, ordenar-les i planificar-ne l'aplicació. En la planificació cal incloure:

- com s'avaluaran? (quan, qui i com s'avaluaran).

Canvi i relacions

Introducció

Per a avaluar els aspectes relacionats amb les idees de canvi i relacions entre magnituds i quantitats, les proves Cb14 se centren en els aspectes descrits mitjançant els models de proporcionalitat directa, que queden recollits en la competència M8; tanmateix, alguns dels aspectes relacionats amb la interpretació de gràfics (vegeu l'apartat d'interpretació de llenguatge matemàtic) s'hi podrien relacionar també estretament. Les activitats escollides en aquesta anàlisi dels resultats que s'hi relacionen són les següents:

Activitat 3: La concentració de minerals a l'aigua és aquí el context en què es pot avaluar la comprensió, en context, de les idees de proporcionalitat i de raó de proporcionalitat. S'hi plantegen tant propostes que necessiten l'ús de la raó de proporcionalitat (com a operador sobre la quantitat variable de litres), com propostes que juguen amb la comprensió de la invariància de la raó (la concentració no depèn de la quantitat de litres).

Activitat 15: Es planteja una situació en la qual apareixen dues magnituds lligades per una relació de proporcionalitat d'ús ben comú en la vida quotidiana: el canvi de moneda. D'una banda, apareix novament la idea de raó de proporcionalitat darrere la concreció del tipus de canvi a aplicar. D'altra banda, apareix també la interpretació del significat de percentatge i d'augment percentual, en el marc de l'aplicació de l'IVA.

Activitat 10: Es tracta d'aplicar el concepte de proporcionalitat geomètrica a l'ampliació i reducció de fotografies. En l'activitat cal trobar les mesures de rectangles semblants a un de partida; són les dimensions de diferents ampliacions d'una fotografia original que han de complir una condició: no superar les dimensions del full on es vol imprimir la fotografia. Per a facilitar la comprensió, es dóna la informació en una taula on caldrà omplir espais buits, tant a la primera columna com a la segona, ample i llarg respectivament.

S'han seleccionat algunes respostes reals d'alumnat, representatives tant de solucions riques i que poden servir de model com representatives d'errors o bloquejos. Els comentaris d'aquestes resolucions posen l'èmfasi en els aspectes vinculats amb el procés d'aprenentatge de l'alumnat i es relacionen amb les observacions que sobre aquest procés tanquen l'apartat.

Activitat 3

LA COMPOSICIÓ DE L'AIGUA

L'aigua de les fonts porta en dissolució sals minerals i altres components en quantitats variables, segons el recorregut subterrani que fa abans de brollar a l'exterior.
És així que a les botigues podem trobar diferents tipus i marques d'aigua, amb una composició química una mica diferent entre elles. Aquí en tens una mostra, i en cada cas s'indica la *concentració* (en mil·ligrams per litre, mg/l) d'uns quants d'aquests minerals i del residu sec:

LA FONT	mg/l
Residu sec	428
Bicarbonats (HCO_3)	245,6
Calci (Ca)	93,8
Magnesi (Mg)	25,3
Sodi (Na)	21,3

SALUT	mg/l
Residu sec	670
Bicarbonats (HCO_3)	158,2
Calci (Ca)	155,2
Magnesi (Mg)	18,3
Sodi (Na)	11,2

VITA	mg/l
Residu sec	395
Bicarbonats (HCO_3)	337,8
Calci (Ca)	89,4
Magnesi (Mg)	6,0
Sodi (Na)	18,7

Resposta 1

2 Mirant la composició de l'aigua **LA FONT**, calcula quants mil·ligrams (mg) de sodi hi haurà en tres litres d'aigua.

21,3 × 3 = 63,9 mg en 3 litres d'aigua.

Es pot intuir que l'alumne ha comprès el significat del terme *concentració*, identificant-lo com un «tant per un» que li ve donat, o sigui com a operador sobre la quantitat variable de litres, i, per tant, identificant-lo implícitament (en context) com a raó de proporcionalitat. Donada la naturalesa dels nombres implicats, sembla que ha efectuat mentalment els càlculs, ha interpretat correctament el resultat i ha expressat la resposta de forma explícita.

Resposta 2

2 Mirant la composició de l'aigua **LA FONT**, calcula quants mil·ligrams (mg) de sodi hi haurà en tres litres d'aigua.

~~[illegible]~~ 11,2 mg/l = ? mg/3 l Resolució: 11'2 mg · 3 l = 33'6 mg/3 l
Resultat: Hi haura 33'6 mg de Na (Sodi) en 3 l d'aigua de la Font.

Malgrat que l'alumne confon les dades de l'enunciat (llegeix les dades d'una taula equivocada), s'hi observa un procés de resolució força ric i poc habitual en aquest nivell: la concentració no és la idea intuïtiva del «tant per un» que haurà d'aplicar com a factor a la quantitat variable de litres, sinó que és en si mateixa la idea rigorosa de raó de proporcionalitat, o sigui l'estableix com una proporció que s'ha de mantenir entre dues magnituds, la massa i la capacitat.

CANVI I RELACIONS

Resposta 3

2 Mirant la composició de l'aigua **LA FONT**, calcula quants mil·ligrams (mg) de sodi hi haurà en tres litres d'aigua.

7,1 mil·ligrams de sodi

Es pot intuir que l'alumna o bé no ha entès la idea de «tant per un» (la versió més simple de la idea de raó de proporcionalitat) que hi ha al darrere del terme *concentració*, tot confonent l'operació adequada amb la seva recíproca (divisió per 3 en comptes de multiplicació per 3), o bé en fa un ús mecànic i arbitrari o buit de significat (uns càlculs cecs).

Resposta 4

2 Mirant la composició de l'aigua **LA FONT**, calcula quants mil·ligrams (mg) de sodi hi haurà en tres litres d'aigua.

21'3 × 21'3 × 21'3 = 63'9 mg

Si s'admet que l'error greu d'escriptura dels càlculs és més aviat una manca de concentració en escriure el signe «x» quan s'està pensant en el signe «+», es pot intuir aleshores una visió reduccionista en la comprensió del model: l'esquema mental que s'aplica és additiu, no pas multiplicatiu, la qual cosa limita l'ús dels procediments propis de la proporcionalitat a situacions molt elementals (nombres naturals).

Resposta 5

1 Les concentracions de les diferents substàncies es mesuren en mg/l, o sigui en «mil·ligrams per litre». Una concentració de 21,3 mg/l significa que... (marca amb una **X** la frase correcta):

- …un litre pesa 21,3 mil·ligrams en total. ☐
- …un litre conté 21,3 mil·ligrams d'aquella substància. ☐
- …21,3 mil·ligrams de la substància ocupen un litre. ☐
- …en 21,3 litres d'aigua hi ha un mil·ligram de la substància. ☒

2 Mirant la composició de l'aigua **LA FONT**, calcula quants mil·ligrams (mg) de sodi hi haurà en tres litres d'aigua.

63,9 litres d'aigua

Cal pensar que la incoherència de la resposta lliga amb la manca de comprensió del terme *concentració*. S'aplica «correctament» però de forma cega un mecanisme buit de significat i après de memòria, i s'ignora el significat del resultat (les unitats).

Resposta 6

ACTIVITAT 3

LA COMPOSICIÓ DE L'AIGUA

L'aigua de les fonts porta en dissolució sals minerals i altres components en quantitats variables, segons el recorregut subterrani que fa abans de brollar a l'exterior.
És així que a les botigues podem trobar diferents tipus i marques d'aigua, amb una composició química una mica diferent entre elles. Aquí en tens una mostra, i en cada cas s'indica la *concentració* (en mil·ligrams per litre, mg/l) d'uns quants d'aquests minerals i del residu sec:

LA FONT	mg/l
Residu sec	428
Bicarbonats (HCO_3)	245,6
Calci (Ca)	93,8
Magnesi (Mg)	25,3
Sodi (Na)	21,3

SALUT	mg/l
Residu sec	670
Bicarbonats (HCO_3)	158,2
Calci (Ca)	155,2
Magnesi (Mg)	18,3
Sodi (Na)	11,2

VITA	mg/l
Residu sec	395
Bicarbonats (HCO_3)	337,8
Calci (Ca)	89,4
Magnesi (Mg)	6,0
Sodi (Na)	18,7

1 Les concentracions de les diferents substàncies es mesuren en mg/l, o sigui en «mil·ligrams per litre». Una concentració de 21,3 mg/l significa que... (marca amb una **X** la frase correcta):

- ...un litre pesa 21,3 mil·ligrams en total. ☐
- ...un litre conté 21,3 mil·ligrams d'aquella substància. ☐
- ...21,3 mil·ligrams de la substància ocupen un litre. ☐
- ...en 21,3 litres d'aigua hi ha un mil·ligram de la substància. ☒

(0-1) 0 3.1

2 Mirant la composició de l'aigua **LA FONT**, calcula quants mil·ligrams (mg) de sodi hi haurà en tres litres d'aigua.

~~[illegible]~~ hi ha 0'0639 litres ~~km~~ 3 litres

(0-1) 0 3.2

D'una banda, la resposta incorrecta a la primera qüestió pot no deixar cap mena de dubte que no hi ha una correcta comprensió del terme *concentració*; tanmateix, les anotacions al marge poden fer pensar en una explicació que va paral·lela: l'absurditat de la resposta també pot provenir d'un bloqueig que s'ha produït per una creença de l'alumna que consisteix a identificar el procés de resolució amb els referents que puguin aparèixer en l'enunciat, supravalorant en aquest cas els mecanismes de canvis d'unitats (utilitzant-los al mateix temps de forma incorrecta).

CANVI I RELACIONS

Resposta 7

2 Mirant la composició de l'aigua **LA FONT**, calcula quants mil·ligrams (mg) de sodi hi haurà en tres litres d'aigua.

75,9 mg de sodi

2 Mirant la composició de l'aigua **LA FONT**, calcula quants mil·ligrams (mg) de sodi hi haurà en tres litres d'aigua.

3·21,3=42,6 42,6 mg de sodi

Dos errors probablement «col·laterals», de manca de concentració: en aquest darrer exemple, l'alumne comet un sorprenent error de càlcul, i en el primer no hi ha dubte que es tracta d'un error de lectura de les dades (el magnesi en lloc del sodi).

Resposta 8

1 Les concentracions de les diferents substàncies es mesuren en mg/l, o sigui en «mil·ligrams per litre». Una concentració de 21,3 mg/l significa que... (marca amb una **X** la frase correcta):

- ...un litre pesa 21,3 mil·ligrams en total. ☐
- ...un litre conté 21,3 mil·ligrams d'aquella substància. ☒
- ...21,3 mil·ligrams de la substància ocupen un litre. ☐
- ...en 21,3 litres d'aigua hi ha un mil·ligram de la substància. ☐

2 Mirant la composició de l'aigua **LA FONT**, calcula quants mil·ligrams (mg) de sodi hi haurà en tres litres d'aigua.

En 3 litres hi hauran 63,9 litres

2 Mirant la composició de l'aigua **LA FONT**, calcula quants mil·ligrams (mg) de sodi hi haurà en tres litres d'aigua.

21,3 × 3 = 63,9 mg/l hi ha en 3 litres.

Tot i que probablement hi ha una bona comprensió del terme *concentració* i un bon ús del procediment, les respostes esdevenen absurdes pel fet de no donar importància a l'adequada expressió de la resposta (o sigui, el correcte ús de les unitats adients). Potser és més un tema de «fenòmens paràsits» de la pragmàtica del qüestionament escolar («el que importa és el resultat numèric», sense fer cap qüestionament crític en el sentit que aquest resultat vol dir alguna cosa, té unes unitats... , que sí es faria en el context quotidià o fins i tot en les classes d'altres matèries) que una manca de comprensió del significat del que s'està dient. Aquest aspecte (l'ús adequat de les unitats i del significat dels resultats) va més enllà dels aspectes centrals que aquí abordem (canvi i relacions), però no per això deixa de tenir una importància cabdal.

Resposta 9

1 Les concentracions de les diferents substàncies es mesuren en mg/l, o sigui en «mil·ligrams per litre». Una concentració de 21,3 mg/l significa que... (marca amb una **X** la frase correcta):

...un litre pesa 21,3 mil·ligrams en total.	☐
...un litre conté 21,3 mil·ligrams d'aquella substància.	☐
...21,3 mil·ligrams de la substància ocupen un litre.	☒
...en 21,3 litres d'aigua hi ha un mil·ligram de la substància.	☐

2 Mirant la composició de l'aigua **LA FONT**, calcula quants mil·ligrams (mg) de sodi hi haurà en tres litres d'aigua.

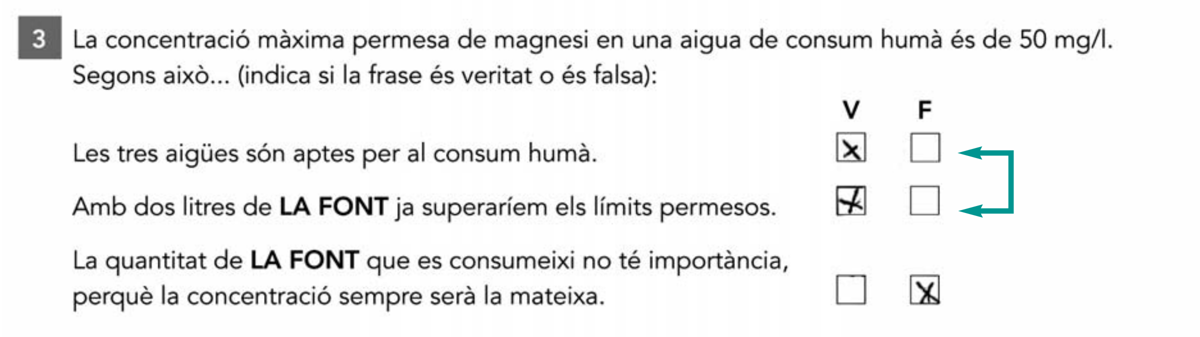
63'9 mg

En aquest cas es produeix una contradicció curiosa: s'ha resolt correctament la qüestió 2, probablement a partir dels coneixements intuïtius o quotidians, malgrat que prèviament s'ha interpretat de manera errònia (i de forma absolutament acrítica, que contrasta amb aquests coneixements) el significat de la concentració.

Resposta 10

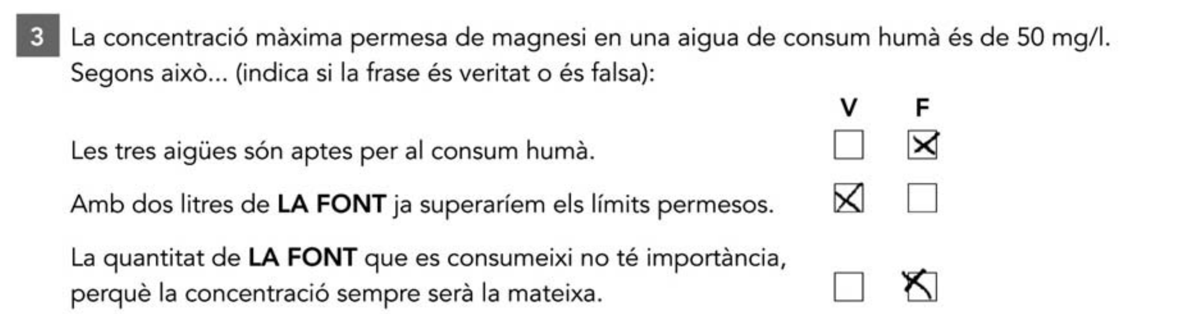
3 La concentració màxima permesa de magnesi en una aigua de consum humà és de 50 mg/l. Segons això... (indica si la frase és veritat o és falsa):

	V	F
Les tres aigües són aptes per al consum humà.	☐	☒
Amb dos litres de **LA FONT** ja superaríem els límits permesos.	☒	☐
La quantitat de **LA FONT** que es consumeixi no té importància, perquè la concentració sempre serà la mateixa.	☒	☐



3 La concentració màxima permesa de magnesi en una aigua de consum humà és de 50 mg/l. Segons això... (indica si la frase és veritat o és falsa):

	V	F
Les tres aigües són aptes per al consum humà.	X	
Amb dos litres de **LA FONT** ja superaríem els límits permesos.	X	
La quantitat de **LA FONT** que es consumeixi no té importància, perquè la concentració sempre serà la mateixa.		X



3 La concentració màxima permesa de magnesi en una aigua de consum humà és de 50 mg/l. Segons això... (indica si la frase és veritat o és falsa):

	V	F
Les tres aigües són aptes per al consum humà.		X
Amb dos litres de **LA FONT** ja superaríem els límits permesos.	X	
La quantitat de **LA FONT** que es consumeixi no té importància, perquè la concentració sempre serà la mateixa.		X

Caldria entendre, en general, que el fet d'interpretar com a correcta la tercera frase és una mostra de la identificació (si més no intuïtiva o implícita) de la invariància del terme concentració en la situació plantejada, invariància que caracteritza aquestes situacions i la idea mateixa del «tant per un» que porta al concepte matemàtic de raó de proporcionalitat. Això hauria de ser coherent amb el fet de donar com a falsa la segona de les frases i com a correcta la primera.

Des d'aquesta perspectiva, en el primer dels exemples es podria entendre la incoherència entre les respostes a la segona i tercera frases. Com que aquesta identificació abans esmentada no es produeix de forma tan clara o generalitzada, l'alumna pot haver identificat el terme *concentració* com un terme quotidià, que apareix en determinats contextos on intervé l'aigua (i, per tant, invariant des d'una perspectiva empírica, però en certa manera irreflexiva), del qual no té clar el significat perquè no es relaciona amb la idea de «tant per un», com mostra la resposta a la segona frase.

En el segon dels exemples, la resposta errònia a les dues darreres frases, identificació directa i indirecta de la concentració com una invariant, és coherent, però es contradiu amb la resposta correcta a la primera. Probablement cal buscar l'explicació en una idea externa al context escolar que ha interferit positivament en l'alumne: les aigües a la venda sempre són aptes per al consum humà.

En el tercer exemple, la coherència és total en els tres errors.

En qualsevol cas, no es pot descartar que les incoherències observades no siguin fruit de l'aleatorietat.

Activitat 15.1

CANVI DE MONEDA

La Brigitte vol comprar una taula d'skater a Catalunya per Internet perquè li ha semblat que els preus són millors que a Canadà, el seu país. En Marc li recorda que els preus de Catalunya estan en euros i que a més s'hi ha d'afegir el 16% d'IVA. Les despeses d'enviament estan incloses en el preu.

La taula d'skater que vol la Brigitte surt en el catàleg de Catalunya a 72 euros, sense IVA.
La mateixa taula a Mont-real la troba per 110 dòlars canadencs (impostos inclosos).
En Marc li envia la informació del tipus de canvi:

1 euro = 1,4708 dòlars canadencs

1 Quants dòlars canadencs són els 72 euros?

2 Quant val, en dòlars canadencs, la taula del catàleg de Catalunya un cop afegit el 16% d'IVA?

3 Tenint en compte els canvis de moneda i l'IVA que cal afegir al preu del catàleg de Catalunya, on és preferible comprar la taula?

En aquesta situació plantejada, la raó de proporcionalitat és explícitament presentada com a «tant per un»; en contrapartida, cal considerar en l'anàlisi que, en no ser presentat en un format verbal de l'estil «cada euro equival a 1,4708 dòlars», inclou una certa comprensió de llenguatge prealgebraic, més que de llenguatge aritmètic.

En conseqüència, és difícil d'establir si la comprensió i el correcte ús del concepte (*canvi, tant per un...*) són o no són molt més simples en aquest cas.

Resposta 1

1 Quants dòlars canadencs són els 72 euros?

72 × 1,4708 = 105,8976 dòlars canadencs.

En l'exemple aquí mostrat, l'alumne fa un ús correcte i explícit de la raó i expressa correctament el resultat en el seu significat, encara que no l'arrodoneix com seria d'esperar que fes en un context quotidià.

Resposta 2

1 Quants dòlars canadencs són els 72 euros?

105,90 $

1 Quants dòlars canadencs són els 72 euros?

105,89

1 Quants dòlars canadencs són els 72 euros?

106 dolars canadencs

En tots tres exemples s'intueix que l'alumnat ha fet un ús correcte del model i del concepte, i podem observar-hi tres criteris diferents d'arrodoniment, amb major o menor correcció.

Resposta 3

1 Quants dòlars canadencs són els 72 euros?

72 : 1'4708 : 48'95 dolars canadencs

Aquest error és el característic que es deriva de la forma de presentació de la raó de proporcionalitat en forma de llenguatge prealgebraic abans esmentada: el «tant per un» és explícit sempre que s'interpreti adequadament el significat que hi ha en l'expressió (d'altra banda, força quotidiana, però no per això exempta de dificultat). Així, l'alumna divideix en lloc de multiplicar, per tal com interpreta la relació just a l'inrevés.

Activitat 15.2

Resposta 4

2 Quant val, en dòlars canadencs, la taula del catàleg de Catalunya un cop afegit el 16% d'IVA?

72·1,16 = 83,52   83,52·1,4708 = 122,842216   R: 122,841215 dolars.

116% com a operador 1,16

Cal distingir dues característiques del procediment de resolució d'aquest alumne. D'una banda, fa una interpretació literal de l'enunciat («el valor de la taula... un cop afegit...») que el porta a ignorar el pas previ ja calculat en la qüestió 1, calculant primer el cost amb l'IVA per a determinar tot seguit la seva equivalència en dòlars.

D’altra banda, l’alumne mostra un domini complet del procediment en la mesura en què no solament identifica i usa correctament el percentatge com a operador, i també la seva equivalència en decimals, sinó que també ho fa amb la idea bastant més complexa que suposa entendre *l’augment percentual* com un nou percentatge en si mateix, en aquest cas del 116%.

Com a aspecte negatiu, cal observar-hi l’expressió descontextualitzada i acrítica que fa del resultat numèric (expressió amb 6 decimals).

Resposta 5

2 Quant val, en dòlars canadencs, la taula del catàleg de Catalunya un cop afegit el 16% d’IVA?

105,8976+16,943616 = 122,841216.

100% 16%

Completament diferent de l’anterior, aquesta resolució aprofita, d’una banda, el resultat de la qüestió 1 per a aplicar-hi l’augment esmentat; d’altra banda, el procediment emprat en aquest cas és el més simple (i menys elaborat des de la perspectiva de la proporcionalitat directa) i consisteix a calcular per una part el valor del 16% per a sumar-lo a continuació a la base imposable.

Tanmateix, l’alumna no deixa registre de com ha efectuat els càlculs del 16%: o bé ha utilitzat l’operador 16/100 (16 de cada 100) o bé l’operador 0,16.

Resposta 6

2 Quant val, en dòlars canadencs, la taula del catàleg de Catalunya un cop afegit el 16% d’IVA?

cop c 88€ = 72 + 16

2 Quant val, en dòlars canadencs, la taula del catàleg de Catalunya un cop afegit el 16% d’IVA?

$16\% = \frac{1,6}{100} = 1,6$ / $72 + 1,6 = 73,6$ $73,6 \times 1,4708 =$ 108,25088

2 Quant val, en dòlars canadencs, la taula del catàleg de Catalunya un cop afegit el 16% d’IVA?

49'95+0'16 = 49'11 dolars canadencs 16:100 = 0'16

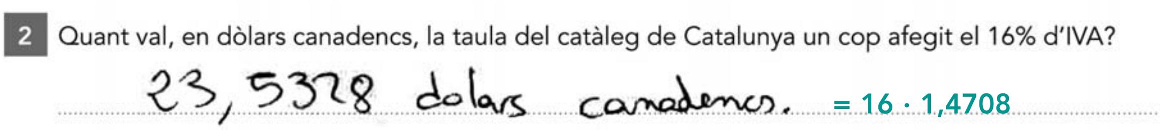
Els tres errors aquí presentats tenen un aspecte en comú: l’aplicació d’esquemes additius, probablement (i tradicionalment) derivats, d’una banda, de la identificació cega del terme *afegir* a la idea de suma i, d’altra banda, d’entendre la idea de percentatge en termes absoluts i no pas en termes relatius o d’operador.

En el primer dels exemples, l'alumna simplement «suma 16» als 72 €. En el segon, a banda d'incorreccions de llenguatge aritmètic i d'interpretació decimal del 16%, el percentatge és sumat també directament als 72 €. Finalment, en el tercer, després de fer una interpretació correcta de 16% com a 0,16, suma aquesta quantitat al valor dels dòlars (incorrecte per altres errors) obtingut en la qüestió 1.

Resposta 7

L'alumne utilitza el punt per a indicar la posició de la coma que separa la part entera de la decimal. Aclarit això, s'observa que el valor 16.943 és el resultat d'aplicar (correctament) el 16% al valor de 105,897, confonent, doncs, el valor de l'IVA amb el valor del resultat «d'afegir l'IVA» a la base imposable.

Resposta 8



En aquest cas, l'error s'explica des d'una confluència entre el fet de no interpretar correctament el significat de l'*augment percentual* i el fet de no interpretar correctament el significat del *canvi de moneda* com un «tant per un», ja que 23,5328 és el resultat d'aplicar el factor 16 a aquest canvi.

Activitat 10.1

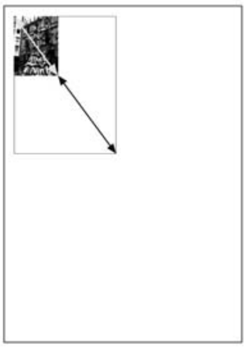
LA FOTOGRAFIA

La Brigitte li demana a en Marc una fotografia de Terrassa per penjar-la a l'habitació.

La foto que en Marc li envia és de les mides recomanades per enviar per correu electrònic:

640 píxels x 480 píxels que en cm són **5,42 cm x 4,06 cm**

1 La Brigitte ha d'ampliar la fotografia per imprimir-la, com més gran millor, en un full DIN A4 (21 cm x 29,7 cm). El programa informàtic que amplia la fotografia conserva les proporcions de l'original de 4,06 cm x 5,42 cm.



Resposta 1

En aquesta taula es recullen algunes ampliacions que es podrien fer conservant les proporcions originals. Completa-la.

8'12
+ 1'36
9'48

16'26
− 1'36
14'90

5'42
− 4'06
1'36

ample	llarg
4,06 cm	5,42 cm
8,12 cm	9'48 cm
14'90 cm	16,26 cm
18'64 cm	.... cm

En aquesta taula es recullen algunes ampliacions que es podrien fer conservant les proporcions originals. Completa-la.

5,42 - 4,06 = 1,36

ample	llarg
4,06 cm	5,42 cm
8,12 cm	9,48 cm
14,9 cm	16,26 cm
18,96 cm	20,32 cm

16,26 - 1,36 =

4,06 - 14,9 = 18,96

= 1,36 + 8,12

= 1,36 + 18,96

En el primer cas, les operacions al marge semblen confirmar que l'alumna ha confós el fet que les fotografies «han de mantenir unes proporcions» (model lineal de proporcionalitat) amb el fet que les fotografies «han de seguir unes pautes que mantenen la forma», que en aquest cas es considera que són d'additivitat horitzontal: o sigui, les fotos han de tenir sempre 1,36 cm més de llarg que d'ample. S'intueix que el darrer exemple prové d'inventar-se una dimensió raonable (els 20 cm de llarg) i aplicar la pauta per a obtenir l'altra dimensió. Malgrat els referents de terminologia que conté l'enunciat, en no haver identificat el model adequat (esquema multiplicatiu) i en haver donat probablement pes excessiu a les imatges mentals (ingènues o reduccionistes) que es deriven del fet d'ampliar les fotografies mantenint «la forma», no pot adonar-se de cap tipus de contradicció amb les respostes que ha donat: són completament coherents entre elles i amb aquestes «pautes», i el context difícilment li permet adonar-se del seu error, ja que les dimensions i les proporcions originals no permeten, sense fer dibuixos, contrastar la validesa de la seva opció.

En el segon cas s'observa l'aplicació d'un criteri similar. Tanmateix, el darrer exemple, el lliure, s'intueix que curiosament prové d'obtenir l'amplada per un mètode que, si es fes servir un model de proporcionalitat, seria correcte: considera com a amplada la suma de dues de les amplades (4,06 + 14,90 = 18,96); tanmateix, la llargada no considera que sigui la suma de les llargades, sinó el resultat d'aplicar la «pauta».

Resposta 2

En aquesta taula es recullen algunes ampliacions que es podrien fer conservant les proporcions originals. Completa-la.

5,42 - 4,06 = 1,36

ample	llarg
4,06 cm	5,42 cm
8,12 cm	9'48 cm
14,9 cm	16,26 cm
29,8 cm	32'52 cm

16,26 - 1,36 =

= 1,36 + 8,12

x 2

x 2

En aquesta taula es recullen algunes ampliacions que es podrien fer conservant les proporcions originals. Completa-la.

ample	llarg
4,06 cm	5,42 cm
8,12 cm	10,84 cm
13,54 cm	16,26 cm
20,54 cm	23,26 cm

En ambdós exemples s'observa la mateixa contradicció: dins la mateixa resposta es combina l'aplicació d'esquemes additius abans esmentats amb criteris simplistes propis de la proporcionalitat (però «en mal moment»).

En el primer cas, l'alumna obté l'exemple lliure doblant les dues dimensions del darrer exemple i, per tant, utilitzant de forma correcta, encara que simple, el model de proporcionalitat. Tanmateix, no considera que això fa que les dimensions superin els límits establerts.

En el segon cas, el primer exemple està ben determinat doblant la llargada. Tanmateix, un cop té aquestes dades, observa que 10,84 – 8,12 = 2,72 i considera que aquesta ha de ser la pauta d'additivitat que horitzontalment ha de seguir la següent parella de dimensions. En l'exemple lliure fins i tot ho combina amb una pauta d'additivitat vertical: suma 7 a cadascuna de les dimensions de l'exemple anterior.

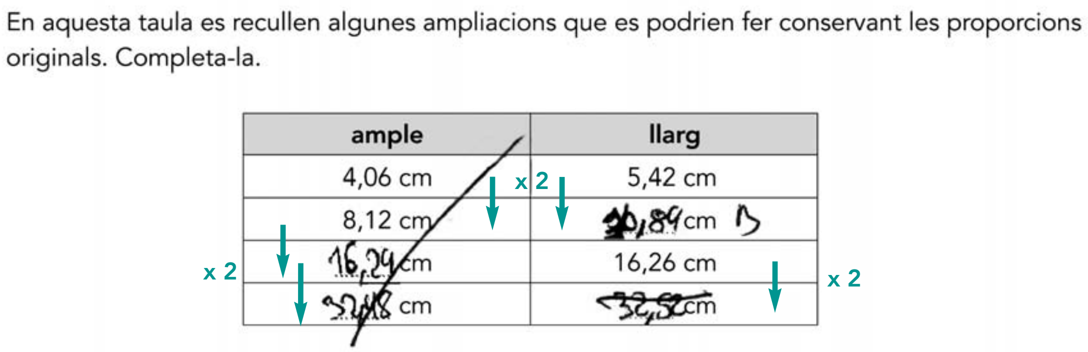
Resposta 3

En aquesta taula es recullen algunes ampliacions que es podrien fer conservant les proporcions originals. Completa-la.

ample	llarg
4,06 cm	5,42 cm
8,12 cm	9,26 cm
15,12cm	16,26 cm
.... cm	.... cm

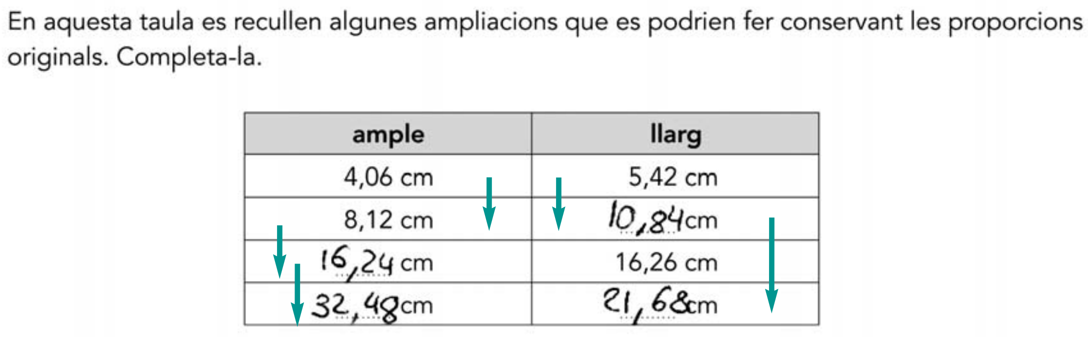
En aquesta resolució, incompleta, l'alumna aplica també pautes d'additivitat «vertical»: o sigui, considera que la relació entre les dimensions del tercer exemple i el segon és d'una addició de 7 cm a cada dimensió, sense entrar a considerar que aquesta pauta no es manté entre el primer i el segon exemples.

Resposta 4



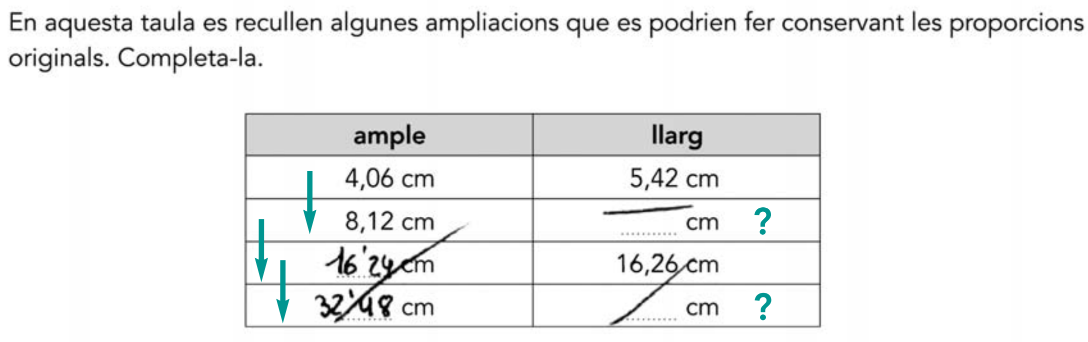
En aquesta taula es recullen algunes ampliacions que es podrien fer conservant les proporcions originals. Completa-la.

ample	llarg
4,06 cm	5,42 cm
8,12 cm	10,84 cm 13
16,24 cm	16,26 cm
32,48 cm	~~32,52~~ cm



En aquesta taula es recullen algunes ampliacions que es podrien fer conservant les proporcions originals. Completa-la.

ample	llarg
4,06 cm	5,42 cm
8,12 cm	10,84 cm
16,24 cm	16,26 cm
32,48 cm	21,68 cm



En aquesta taula es recullen algunes ampliacions que es podrien fer conservant les proporcions originals. Completa-la.

ample	llarg
4,06 cm	5,42 cm
8,12 cm	cm ?
16'24 cm	16,26 cm
32'48 cm	cm ?

Les tres resolucions són mostres de l'efecte que produeix l'aplicació irreflexiva del model de proporcionalitat: de fet, no han aplicat el model, sinó una mecànica més o menys «cega» o buida de significat, que consisteix a efectuar successives multiplicacions a manera de «pautes» en una taula de valors o en una «sèrie numèrica».

En el primer cas, és probable (tampoc no és segur) que s'hagi identificat una situació en què és aplicable un model de proporcionalitat directa. El primer exemple es resol correctament: l'alumna, induïda per l'observació que l'amplada s'ha doblat, dobla també la llargada. En qualsevol cas, a partir d'aquí adopta aquesta mecànica de forma ja irreflexiva: dobla successivament l'amplada i absolutament per separat, saltant-se precisament la dada que l'hauria pogut portar a pensar que no era correcte el que feia, dobla també la llargada. Tot això la mena a un error afegit: les seves dimensions finals superen els límits establerts.

Els dos exemples següents confirmen la hipòtesi que s'ha aplicat aquesta mecànica de forma absolutament cega i absent de qualsevol significat, més similar a un joc que a un problema per resoldre. En el segon cas, donat que «la casella següent de la llargada és plena», el valor de doblar s'escriu a la següent. En el darrer cas, els valors de la llargada ni s'escriuen.

Resposta 5

En aquesta taula es recullen algunes ampliacions que es podrien fer conservant les proporcions originals. Completa-la.

ample	llarg
4,06 cm	5,42 cm
8,12 cm	16,24 cm
8,13 cm	16,26 cm
12,4 cm	24,8 cm

En aquest exemple, l'alumne considera que entre l'amplada i la llargada hi ha la proporció «és el doble de...» i l'aplica sense considerar que està entrant en contradicció amb el conjunt de les dades.

Algunes consideracions sobre el procés d'ensenyament i aprenentatge del canvi i les relacions

Indubtablement el primer cicle de l'ensenyament secundari és un moment «de pas», encara que cabdal, en el procés d'aprenentatge de les relacions entre les quantitats, en particular de la proporcionalitat directa, ja que, de fet, aquesta estructura conceptual no queda plenament consolidada fins al segon cicle. Tanmateix, és molt important posar l'èmfasi adequada i de manera acurada en aquest cicle.

Ara bé, per tal que aquest pas sigui possible i eficient, l'alumnat haurà de tenir mínimament consolidades la comprensió i l'ús dels diferents significats del concepte de fracció que es comencen a treballar en els últims cursos de primària.

Una adequada competència de l'alumnat en l'ús de les estructures de la proporcionalitat va més enllà del fet d'establir la igualtat de dues raons entre magnituds i obtenir l'element desconegut, i també molt més enllà del fet d'aplicar un factor multiplicatiu (la raó) a una variable o del fet d'aplicar una mecànica (la regla de tres); en el seu moment aquesta competència l'hauria de portar a reconèixer quantitats que estan relacionades proporcionalment, a utilitzar indistintament diferents fonts i llenguatges, a establir quines són les relacions... De fet, en el seu moment la proporcionalitat li hauria de permetre integrar i connectar diferents camps matemàtics.

Per tant, com es deia, les experiències i el treball previ de l'alumnat amb les fraccions i els nombres racionals haurien d'haver estat (i no es dubta que en molts casos han estat) prou rics, flexibles, lents i molt estructurats. En la mesura en què en el primer cicle de secundària es detectin mancances en alumnes concrets, és important intervenir-hi, perquè més que mai són fases i experiències que no es poden obviar en el procés de construcció d'aquesta estructura conceptual.

És per això que és aquí on es posarà una part de l'èmfasi d'aquestes consideracions. A què ens referim amb «un treball ric i flexible»? Al fet que la idea de fracció hauria d'estar estretament relacionada amb els diferents significats que adquireix, significats essencialment diferents i alhora complementaris, i sempre entesos des d'una perspectiva dinàmica:

- La fracció com a expressió d'una mesura, que no és convenient identificar amb el significat de 'part d'una unitat', que és subsidiari del primer i que habitualment descriu una situació estàtica, de diferent naturalesa de la que es pretén en aquest treball previ amb les fraccions. Entendre-ho com a mesura pot portar, entre altres coses, a donar significat als elements de la fracció, a les fraccions equivalents, a les fraccions amb numerador superior al denominador, a la fracció entesa com a decimal...

- La fracció entesa com a quocient, o sigui la repartició equitativa de *a* unitats en *b* grups (p. ex., *7 panets entre 5 persones*) mantenint viu el significat del resultat final, tot relacionant-lo amb el significat del que es fa i en cap cas reduint-lo a una mecànica automatitzada.

- La fracció entesa com a operador, o sigui la transformació que consisteix a obtenir una quantitat d'una magnitud com a resultat de fer «una doble acció» mitjançant una fracció sobre una altra quantitat de la mateixa magnitud: dividir l'esmentada quantitat pel denominador i multiplicar el resultat pel numerador, tot donant també significat al procés i al resultat, i expressant-ho tot amb la mateixa unitat (p. ex., *els 2/3 de l'aigua que es beu cadascú, els 116/100 del preu de cada objecte*).

Òbviament estem abordant aspectes que també fan referència a les competències relacionades amb numeració i càlcul, però que hem decidit abordar des d'aquesta perspectiva.

En el darrer marc abans esmentat, el percentatge, entès com una fracció decimal, juga un paper molt rellevant en tant que permet donar expressions «relatives» de quantitat. És així que pot ser interessant que l'alumnat de primer cicle de secundària s'enfronti a tasques que comportin:

- interpretar que una expressió percentual té sempre associada l'expressió «diferència a 100», amb significat propi i complementari de l'anterior (p. ex., *percentatge d'homes i dones, percentatge de descompte i pagament...*);
- interpretar el diferent significat del percentatge: en termes de mesura (p. ex., *és un 23%*) i en termes d'operador (p. ex., *el 23% de...*);
- interpretar el significat de l'operador-percentatge menor que 100 com una «disminució percentual» i el major que 100 com un «augment percentual»;
- efectuar i interpretar càlculs contextualitzats donant aquests significats;
- evitar la necessitat de recórrer a sumes i restes per tal d'efectuar els càlculs d'augments i disminucions percentuals contextualitzats, amb la finalitat de donar major significat a la idea d'operador i de facilitar la comprensió de les «successives» aplicacions de l'operador (per exemple, l'aplicació de dos descomptes consecutius).

Pot ser convenient, però, fer encara un pas més amb el treball amb fraccions, entenent la fracció com a raó, com a mitjà d'expressió de la comparació entre dues magnituds, iguals o diferents, la qual cosa portarà l'alumnat a nous usos: la concentració d'una mescla, les proporcions d'uns fulls, l'escala, la probabilitat... És en aquest marc de reflexió i d'activitats que pren significat la introducció a l'estudi de la relació entre quantitats i la proporcionalitat directa en particular, tal com encapçalàvem l'apartat.

Una adequada seqüència d'activitats a primer cicle seria convenient que tingués en compte la contraposició de situacions i experiències en relació amb les següents perspectives:

a) Treball multiplicatiu simple, coneguda la raó:

- p. ex., *quant és 32 vegades 7*?
- p. ex., *quant és 2,5 vegades 7*?
- p. ex., *quant és 0,34 vegades 7*?

Treball molt simple en aquest moment, però que convindria contraposar amb...

b) Treball d'obtenció de la raó numèrica:
   - p. ex., *quantes vegades 5 és el 7*?
   - p. ex., *quantes vegades 7 és el 5*?

Treball que permet interpretar la raó com a factor, per la mateixa formulació de la pregunta. Aquí és on jugarien un paper importantíssim les idees d'augment i disminució percentuals abans esmentades.

c) Treball amb operadors donats, que transformin valors d'una magnitud en valors de la mateixa magnitud:
   - p. ex., *obtenir les alçades d'uns triangles sabent que són 2/3 de la base*
   - p. ex., *obtenir el nombre de persones amb ulls blaus sabent que habitualment són el 23% de la població*

Consideracions molt importants a tenir en compte serien:
   - que els llenguatges matemàtics a utilitzar, o de suport, fossin diversos (verbal, numèric, taules, gràfics, esquemes o expressions prealgebraiques...);
   - que els operadors fossin presentats en diferents formats (fracció, decimal, percentual),
   - i que les situacions responguessin a contextos molt diferents, quotidians, però no simplistes.

Però també...

d) Treball que consisteixi a obtenir l'operador, o sigui la raó de proporcionalitat que relaciona les diferents parelles de valors de la mateixa magnitud:
   - p. ex., *obtenir la relació entre les alçades i les bases d'un conjunt donat de triangles*
   - p. ex., *obtenir la proporció de persones amb ulls blaus d'entre diferents conjunts donats de població*

Més que mai pot ser convenient tenir presents les consideracions anteriorment esmentades.

Paral·lelament...

e) Treball amb taxes que vénen donades, o sigui els «tant per un», que transformin valors d'una magnitud en valors d'una altra magnitud:
   - p. ex., *obtenir la massa d'un producte en diferents volums de dissolució coneixent-ne la concentració*
   - p. ex., *obtenir el valor en dòlars de diferents quantitats d'euros coneixent el canvi vigent*

Però també...

f) Treball que consisteixi a obtenir «el tant per un», la taxa, que relaciona les diferents parelles de valors de les dues magnituds (per exemple, aplicant el procediment de «reducció a la unitat»):
   - p. ex., *obtenir la concentració d'un producte en una dissolució coneixent diferents parelles de valors*
   - p. ex., *obtenir el canvi vigent entre dues monedes a partir de diferents exemples de valor en dòlars i euros equivalents*

Tot aquest treball hauria de portar a les següents dues fases més complexes, les quals l'alumnat no arriba a assolir autònomament de forma generalitzada a partir de les anteriors:

g) Establiment de relacions, directament entre parelles de valors de la mateixa o diferent magnitud, que permeti obtenir un valor desconegut amb o sense necessitat d'obtenir la raó de proporcionalitat:
   - p. ex., *sabent la quantitat de massa d'un producte present en un determinat volum de dissolució, obtenir la quantitat que hi hauria present en un altre volum donat sabent que té la mateixa concentració*
   - p. ex., *sabent el valor en dòlars que se'ns ha canviat per una quantitat d'euros, obtenir el valor que ens canviarien per una altra quantitat d'euros*

h) Treball directe amb raons, que ha de ser relacionat alhora amb les idees de fracció, de taxes o d'operadors:
   - p. ex., *sabent que en una reunió hi ha 3 noies per cada 4 nois, determinar la quantitat de nois o noies que hi hauria si coneguéssim una de les dues dades, o bé obtenir la taxa de nois i de noies que hi ha, o bé el percentatge...*
   - p. ex., *sabent que en una pizza s'hi posen 3 cullerades d'oli per cada 200 grams de farina, determinar la quantitat d'oli necessària per a una determinada quantitat de farina, o a l'inrevés*

El problema de la reducció i l'ampliació, geomètric, mereix uns comentaris específics. En general es farà referència a les dificultats de la relació forma-dimensions.

La intuïció dels nois i noies ja juga a favor seu des que són petits: identifiquen amb poques dificultats objectes que, tot i tenir dimensions diferents, tenen la mateixa forma, intuïció reforçada, per exemple, per les experiències d'observar els mateixos objectes a diferents distàncies. Tanmateix, aquesta intuïció no ve gaire sovint acompanyada d'una correcta comprensió de les idees geomètriques de proporció i escala; o sigui: què passa realment quan «ampliem» o «reduïm» un objecte mantenint-ne la mateixa forma?, es veuen els efectes d'un factor?

És per això que pot ser molt convenient plantejar al primer cicle les seqüències de treball a l'aula seguint aquestes mateixes dues fases o similars:

1) La primera, originada en les imatges mentals de l'alumnat, intentant que els alumnes identifiquin els trets que caracteritzen una ampliació o una reducció, i intentant que el professorat identifiqui les idees de l'alumnat respecte a la qüestió, les correctes però també les errònies per tal d'incidir-hi.

2) La segona ha de cercar un aprofundiment en la relació multiplicativa de segments que corresponen a «figures proporcionals» i una molt important contraposició del model de creixement additiu amb el multiplicatiu.

En la primera fase seria interessant proposar experiències d'observació i anàlisi, tot investigant les relacions numèriques que mantenen la forma i les que no la mantenen, tant des de la perspectiva de la discriminació del que és correcte i del que no, com des del fet físic de reproduir diferents figures quotidianes amb l'escala que s'hagi decidit, i en general treballant de forma pràctica i propera les transformacions geomètriques. Pot ser molt important en aquesta fase adaptar a l'aula el model propi de la resolució de problemes:

- particularització
- conjecturació
- generalització

I això convé fer-ho centrant-se en el suport d'activitats manipulatives que permetin exemplificar, experimentar, comprovar, falsejar, anticipar, intuir...

En aquesta primera fase, l'anàlisi recolza en les imatges mentals, les percepcions visuals..., però ja es podran analitzar críticament els esquemes additius i els multiplicatius, i també els que es podrien anomenar pseudomultiplicatius.

En la segona fase és quan potser s'haurien de contraposar els procediments que es deriven dels esquemes esmentats, qüestionant-ne uns i aprofundint l'ús dels altres:

- Un esquema additiu incorrecte: l'alumnat pot considerar erròniament que allò que caracteritza les dimensions d'una fotografia de 15 cm d'amplada per 20 cm de llargada és que sempre té 5 cm més de llargada que d'amplada; amb aquest criteri, una fotografia de 20 cm x 25 cm és una ampliació. És probable però difícil que analitzin amb un exemple físic que aquesta conclusió és errònia; però pel mateix motiu les ampliacions de 50 cm x 55 cm o de 2 cm x 7 cm també haurien de ser ampliació o reducció respectivament, i ambdues admeten una fàcil contrastació.

- Un esquema pseudomultiplicatiu correcte però ingenu: l'alumnat pot no ser capaç d'analitzar quins són els trets que caracteritzen les dimensions d'una fotografia de 4 cm x 5 cm. Tanmateix és capaç de fer les següents ampliacions i reduccions: 8 cm x 10 cm, 12 cm x 15 cm, 2 cm x 2,5 cm; i en tots els casos actua amb un esquema mental més additiu que multiplicatiu en tant que està entenent la multiplicació com una suma reiterada. És difícil que aquests alumnes arribin a fer extensives les ampliacions o reduccions a casos més generals, o que siguin capaços de trobar quina ampliació correspondria a una fotografia que té una amplada de 7,62 cm. Aquesta és una fase que molts alumnes passen inevitablement, és la més intuïtiva i la més recolzada en la imatge mental; però caldria ajudar-los perquè la superin i la integrin en els esquemes realment multiplicatius.

- Un esquema multiplicatiu correcte: l'alumnat considera que el tret que caracteritza les dimensions d'una fotografia de 20 cm x 25 cm és la «raó de 20 per cada 25». Si en el treball aritmètic previ abans esmentat s'han treballat la comprensió i l'ús d'aquesta proporció, el pas per a trobar altres parelles amb la mateixa proporció és senzill.

- Un altre esquema multiplicatiu correcte: l'alumnat considera que la fotografia de 20 cm x 25 cm ha de mantenir les mateixes proporcions que la de qualsevol altre exemple de dimensions que li vingui donat. Igualment podem dir que, si en el treball aritmètic previ abans esmentat s'han treballat la comprensió i l'ús de l'establiment directe de relacions entre parelles de valors, el pas per a trobar la dimensió desconeguda és senzill.

En aquesta fase caldria dotar de significat, en aquest context de la proporcionalitat geomètrica, els termes prèviament treballats aritmèticament: raó de proporcionalitat – escala, proporció, «tant per un»/«tant de cada un»...

El següent qüestionari permet al professorat:

- Analitzar el treball que es duu a terme amb els alumnes per a l'aprenentatge de la proporcionalitat directa, incloent-hi les seves fases prèvies.
- Reflexionar sobre la metodologia més adient per a treballar-ho.
- Prendre decisions sobre la gestió docent per a afavorir aquest aprenentatge.

Es recomana començar responent la graella individualment i continuar amb una posada en comú en els departaments i en els equips docents a fi d'arribar a acords de millora.

Qüestionari

A classe es treballen de forma intencionada i explícita...	Molt sovint	Sovint	Alguna vegada	Gairebé mai
...activitats que permetin comprendre i donar significat a la idea de...				
...fracció com a operador.				
...fracció com a quocient de magnituds.				
...fracció com a raó, com a comparació de dues magnituds.				
...percentatge, amb les diferents expressions.				
...disminucions i augments percentuals.				
...taxes, tants per un.				
...relacions multiplicatives, en les reduccions i ampliacions.				
...activitats que permetin comprendre i donar significat a procediments com...				
...la utilització de les fraccions en qualsevol dels seus significats.				
...l'obtenció de la raó i de les taxes, conegudes les magnituds, tant de forma contextualitzada com no.				
...l'obtenció de les magnituds desconegudes, sabent-ne la raó o les taxes, tant de forma contextualitzada com no.				
...l'obtenció de noves dimensions per ampliació o reducció de figures.				
...activitats que permetin identificar i construir contextos en què...				
...hi ha magnituds que es comparen i/o es transformen.				
...intervenen raons o taxes.				
...s'amplien o redueixen figures.				
...s'investiguen o aprofundeixen situacions de proporcionalitat.				
...cal generar imatges mentals en relació amb l'ampliació i reducció de figures.				
...aspectes com...				
...l'argumentació de les decisions i procediments presos.				
...la discussió i contrast entre companys amb relació a les decisions preses.				
...la utilització de materials manipulatius que serveixin per a experimentar, conjecturar i comprovar situacions d'ampliació i reducció.				
...la potenciació de l'ús de les TIC en general com a element que faciliti les tasques rutinàries i/o que permeti desenvolupar simulacions o experimentacions.				

Una vegada estudiats els resultats de la graella, els departaments i els equips docents poden plantejar-se preguntes i arribar a acords sobre:

- quines de les propostes es treballen a les aules?
- com es treballen?

- fins a quin punt les diferents metodologies emprades per cada departament faciliten l'aprenentatge?
- quines no es treballen prou?
- quines es consideren prioritàries?
- des de quines àrees es poden treballar?
- en quins aspectes es pot incidir més adequadament, tenint presents les característiques específiques de cadascuna de les assignatures implicades?

Es recomana triar-ne algunes entre les que es considerin prioritàries, ordenar-les i planificar-ne l'aplicació. En la planificació cal incloure:

- com s'avaluaran? (quan, qui i com s'avaluaran).

Espai i forma

Introducció

Per tal d'avaluar els aspectes d'espai i forma recollits en les competències M2 i M4, en la prova es proposaven cinc activitats diferents (activitats 2,4,9,10 i 17).

De totes s'ha triat analitzar especialment l'activitat 4 (excepte l'última de les qüestions) com la més significativa d'aquest bloc i amb la finalitat de fer palesa la continuïtat del treball de les diferents competències des de primària. Tanmateix, els aspectes mètrics que apareixen en l'activitat (vegeu l'apartat de mesura), tot i ser importants, es plantegen de manera subsidiària.

Activitats 4.1 i 4.2: En aquest context, el concepte de volum pren molta significació. Es planteja calcular-lo en el cas d'un prisma de manera exacta i relacionar-lo amb una aproximació.

Activitat 4.3: Identificació de la forma de la superfície i descomposició d'aquesta forma en figures planes que permetin el càlcul de l'àrea total com a suma de les descomposicions que s'han trobat.

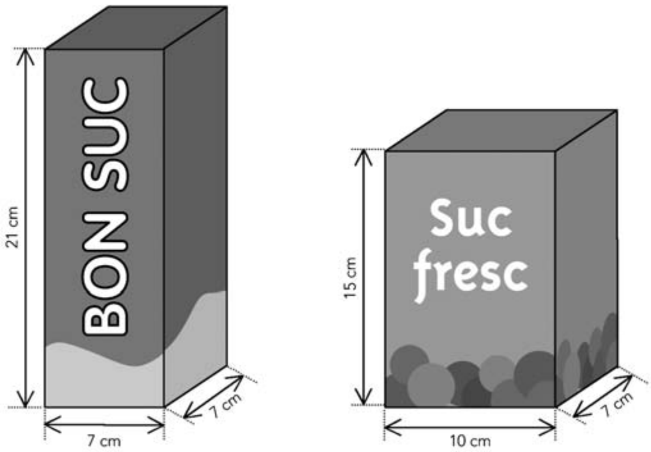
Activitat 4.4: A partir de l'exemple de l'apartat anterior s'ha de dibuixar un desplegament de l'altre bric. És un treball que relaciona una figura tridimensional amb una de bidimensional i que requereix un bon coneixement de les característiques de les figures i la seva visualització mental.

S'han seleccionat algunes respostes dels alumnes, prou representatives. Els comentaris dels trets més significatius d'aquestes respostes dibuixen les dificultats que es presenten en la resolució, alhora que s'il·lustra el procés d'aprenentatge relacionat amb l'activitat.

Activitats 4.1 i 4.2

CONSTRUÏM DOS PLUVIÒMETRES

L'Albert ha construït dos pluviòmetres amb material reciclat per col·locar al terrat de casa i portar una estadística de pluges. Per això ha utilitzat dos brics de sucs de marques diferents, amb les dimensions següents:



1 Quin és el volum del bric de **BON SUC**?

2 Els dos brics poden contenir aproximadament el mateix volum de líquid. Quin és?

1 dm³ ☐ 750 cm³ ☐ 1,5 L ☐ 1 m³ ☐

Resposta 1

1 Quin és el volum del bric de **BON SUC**?

$7 \times 7 \times 21 = 1.029$ cm^3

L'alumne identifica correctament el cos geomètric, expressa l'operació del càlcul del volum, calcula l'operació i utilitza les unitats adients.

Resposta 2

1 Quin és el volum del bric de **BON SUC**?

$21 \times 7 \times 7 = 1029$ cm^2

1 Quin és el volum del bric de **BON SUC**? Volum = alçada x amplada x profunditat

El volum es de 1029 cm

Els alumnes identifiquen correctament la figura, apliquen el càlcul del volum del bric i troben correctament el resultat de l'operació, però no pas el de la pregunta, ja que associen a la magnitud de volum unitats que no hi corresponen. Per a aquests alumnes l'important és que «el resultat» és correcte.

Resposta 3

1 Quin és el volum del bric de **BON SUC**?

1029 cm^3.

2 Els dos brics poden contenir aproximadament el mateix volum de líquid. Quin és?

1 dm^3 ☐ 750 cm^3 ☐ 1,5 L ☐ 1 m^3 ☒

1 Quin és el volum del bric de **BON SUC**?

1029 cm^3

2 Els dos brics poden contenir aproximadament el mateix volum de líquid. Quin és?

1 dm^3 ☐ 750 cm^3 ☐ 1,5 L ☒ 1 m^3 ☐

1 Quin és el volum del bric de **BON SUC**?

$21 \times 7 \times 7 = 1029$ cm^3

2 Els dos brics poden contenir aproximadament el mateix volum de líquid. Quin és?

1 dm^3 ☐ 750 cm^3 ☑ 1,5 L ☐ 1 m^3 ☐

Ara ens trobem davant de tres alumnes que han utilitzat les unitats corresponents en el primer apartat i han donat un resultat correcte, però, en canvi, no han realitzat de manera satisfactòria l'aproximació a una de les quatre respostes possibles.

Aquest error ha estat degut a diversos factors que sovint intervenen en més d'una resposta o de manera aïllada.

En el primer dels casos trobem un clar exemple que no s'han interioritzat correctament les dimensions de les unitats. No hi ha consciència de les dimensions reals d'un metre cúbic, significativa-

ment molt més gran que el volum del bric, i s'hi observa el caràcter acrític dels resultats que sovint donen els alumnes.
Per altra banda, la conversió d'aquest resultat a unes altres unitats els despista totalment. Fins i tot en el darrer exemple es dóna com a resultat correcte aquell que manté les unitats que s'han utilitzat en el primer apartat.

Els alumnes no realitzen correctament la conversió d'unitats i no coneixen l'equivalència de la unitat de volum amb la de capacitat ($1dm^3 \sim 1L$, $1\ cm^3 \sim 1mL$).

A més, en aquest cas la interferència del context és prou important per a donar com a vàlida per a la majoria dels alumnes de la mostra la unitat de capacitat, el litre, ja que és més propera a la realitat i al context que se'ls presenta, fins al punt que hi ha alumnes que han donat com a bona la resposta de 1,5 L sense haver realitzat cap càlcul o havent-lo fet incorrecte.

En qualsevol cas, no es pot descartar que les incoherències observades siguin fruit de l'aleatorietat.

Resposta 4

1 Quin és el volum del bric de **BON SUC?**

$21 \cdot 7 = 147$ / $147 \cdot 4 = 588$ / $7 \cdot 7 = 49$ / $49 \cdot 2 = 98$ / $588 + 98 = \underline{686 cm^2}$

1 Quin és el volum del bric de **BON SUC?**

$7 \cdot 4 + 21 \cdot 4 = 28 + 84 = 112$ cm   El seu volum es de 112 cm^2.

1 Quin és el volum del bric de **BON SUC?**

$7 + 7 = 14 \times 21 = 294$ cm

1 Quin és el volum del bric de **BON SUC?**

35 cm^3

1 Quin és el volum del bric de **BON SUC?**

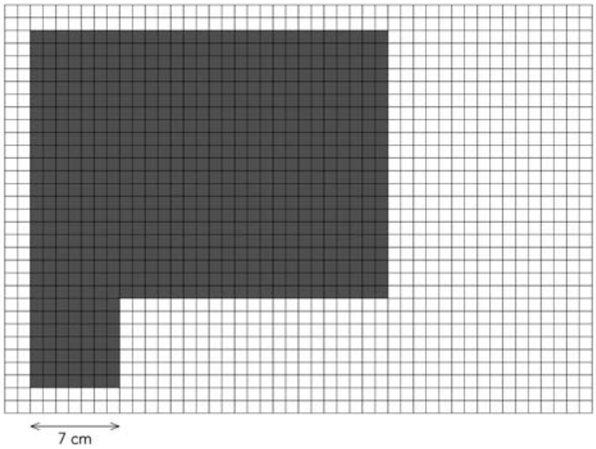
588 cm^2

Altres no tenen assolit el concepte de volum, creuen que el volum «és allò que ocupa el cos», però no han fet el pas a l'espai, continuen només amb significació bidimensional, i alguns entenen el volum com la superfície que ocupa la base, i d'altres, com la superfície total del cos.

Per altra banda, aquests sovint ho redueixen també a un simple procediment mecànic que acaben barrejant amb d'altres d'apresos anteriorment. Apliquen de manera irreflexiva i acrítica fórmules memorístiques i fan un ús arbitrari de les unitats.

Activitat 4.3

3 Ha folrat els dos brics amb un material impermeable i protector. Per al bric de **BON SUC** ha necessitat un retall amb aquesta forma (pensa que no ha de folrar la part superior del bric).



Quants cm² de material va gastar per a folrar el brick de **BON SUC**?

Resposta 1

Quants cm² de material va gastar per a folrar el brick de **BON SUC**?

$28 \times 28 = 784$ $49 \times 3 = 147$ $784 - 147 = 637$

Quants cm² de material va gastar per a folrar el brick de **BON SUC**?

$7 \times 7 = 49\ cm^2$ $7 \times 4 = 28$ $21 \times 28 = 588\ cm^2$ $588 + 49\ cm^2 = \boxed{637\ cm^2}$

Quants cm² de material va gastar per a folrar el brick de **BON SUC**?

$49 \times 13 = 637$

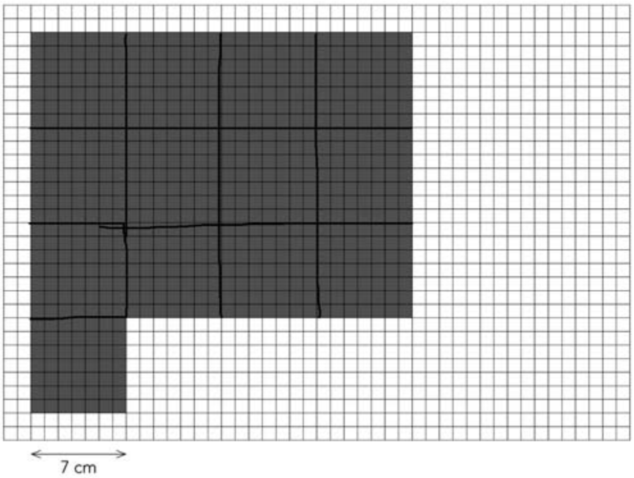
Els tres alumnes resolen correctament l'exercici, però amb estratègies diferents.

El primer utilitza la compleció i calcula per excés l'àrea d'un quadrat gran i després li treu l'àrea del rectangle que no forma part de la superfície ombrejada.

El segon descompon la figura en un quadrat més un rectangle, calcula per separat l'àrea i després suma per obtenir la totalitat.

Finalment el tercer, per comparació amb una unitat, descompon la superfície en tretze quadrats iguals. Aquest mètode, tot i ser útil en aquest exemple, representa un primer estadi en el càlcul de l'àrea de figures planes i és insuficient per a poder generalitzar especialment en el càlcul de superfícies de figures no estàndard.

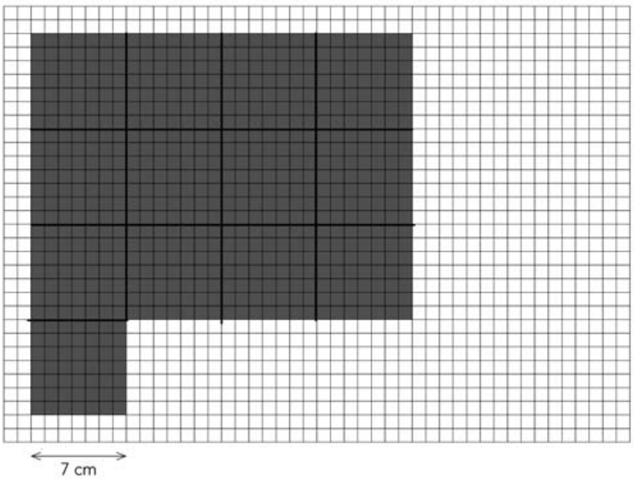
Resposta 2



Quants cm² de material va gastar per a folrar el brick de **BON SUC**?

13 cm².

Aquest alumne es troba també encara en una primera fase d'aprenentatge del concepte d'àrea d'una superfície i la identifica correctament com a suma de 13 unitats iguals (marcades amb bolígraf), però s'equivoca en donar el valor d'1 cm² a cadascuna d'aquestes unitats.

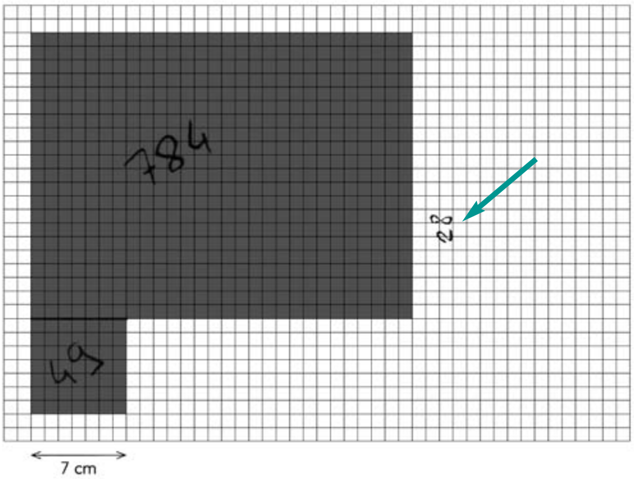


Quants cm² de material va gastar per a folrar el brick de **BON SUC**?

91 cm²

Aquest alumne també utilitza la mateixa estratègia que l'anterior, però dóna el valor de 7 a cada unitat, ja que confon l'àrea del quadrat amb la longitud del costat, que és l'única dada que apareix al dibuix.

Resposta 3

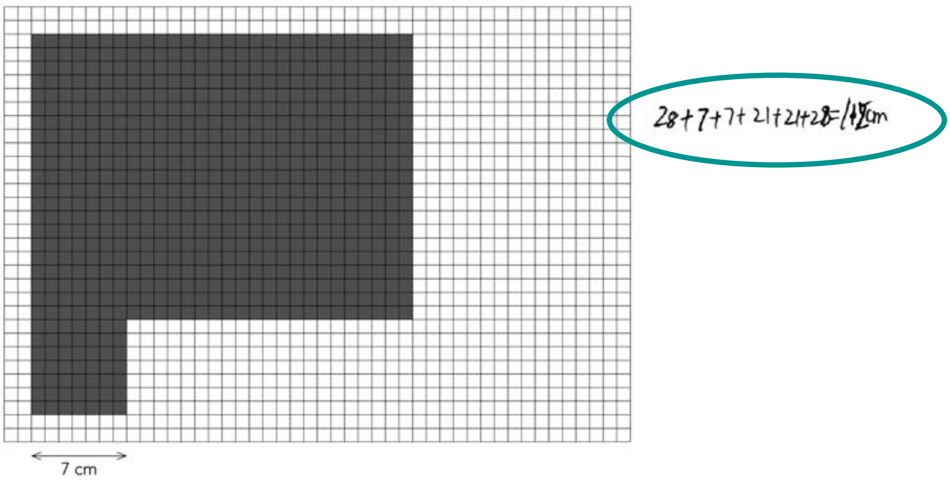


Quants cm² de material va gastar per a folrar el brick de **BON SUC**?

833 cm² = 7 x 7 + 28 x 28 ?

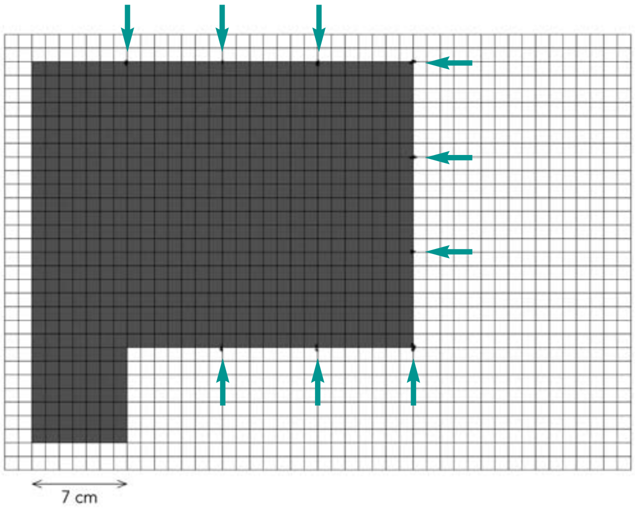
En aquest cas, l'alumne descompon la figura en dues figures estàndard i s'equivoca en la mesura d'una de les dimensions de la figura gran.

Resposta 4



Quants cm² de material va gastar per a folrar el brick de **BON SUC**?

BON SUS material =1[illegible]cm



Quants cm² de material va gastar per a folrar el brick de **BON SUC**?

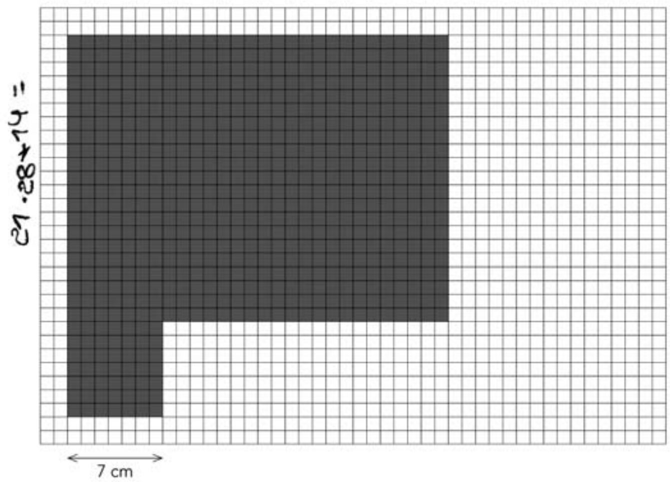
$7 \times 16 = 112$ R: 112 cm²

En aquests casos, els alumnes no han tingut un bon aprenentatge del concepte d'àrea, ja que la identifiquen amb la longitud del contorn de la figura, el perímetre, si bé en el segon cas s'utilitzen les unitats correctes (cm²).

En el segon dels exemples, l'alumne fa marques sobre el dibuix que li facilitin el càlcul del perímetre de la figura mitjançant una estratègia diferent de la del primer exemple.

Resposta 5

3 Ha folrat els dos brics amb un material impermeable i protector. Per al bric de **BON SUC** ha necessitat un retall amb aquesta forma (pensa que no ha de folrar la part superior del bric).



Quants cm² de material va gastar per a folrar el brick de **BON SUC**?

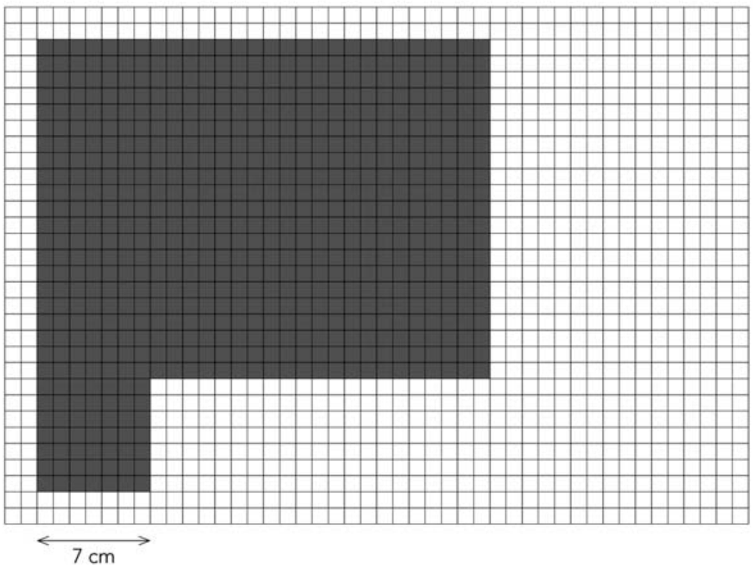
$21 \cdot 28 + 14 = 602$ cm.

L'alumna justifica el seu càlcul perquè ha descompost correctament la figura en dues figures estàndard i hi ha aplicat les fórmules apreses a classe. És a dir, **àrea total = àrea del rectangle + àrea del quadrat**:

àrea del rectangle = costat x costat
àrea del quadrat = costat^2

L'error està en el càlcul de la potència ($7^2 = 14$) i en el fet de no haver interioritzat el caràcter multiplicatiu de les dimensions per al càlcul de l'àrea (observem que utilitza **cm** en comptes de **cm²** com a unitats d'àrea).

Resposta 6



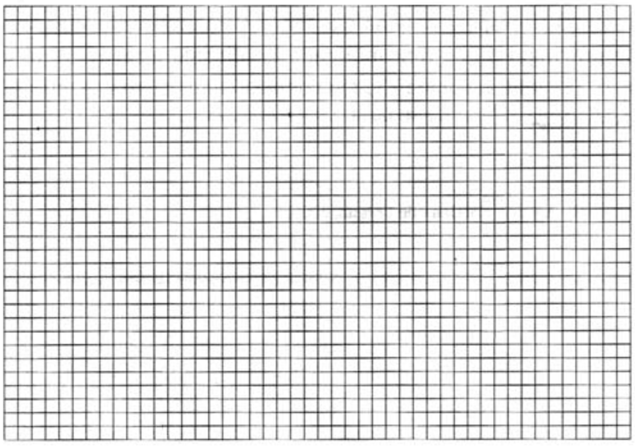
Quants cm² de material va gastar per a folrar el brick de **BON SUC**?

7 x 7 + 21 x 28 = $\boxed{1960 \text{ cm}^2}$ = (7 x 7 + 21) x 28

Tot i expressar correctament el càlcul, l'error prové d'un mal ús de la calculadora. La interferència de la tecla «=» al mig de l'operació combinada fa trencar la prioritat de les operacions. L'alumne utilitza la seqüència 7 x 7 + 21 = x 28 = en comptes del que seria correcte: 7 x 7 + 21 x 28 = .

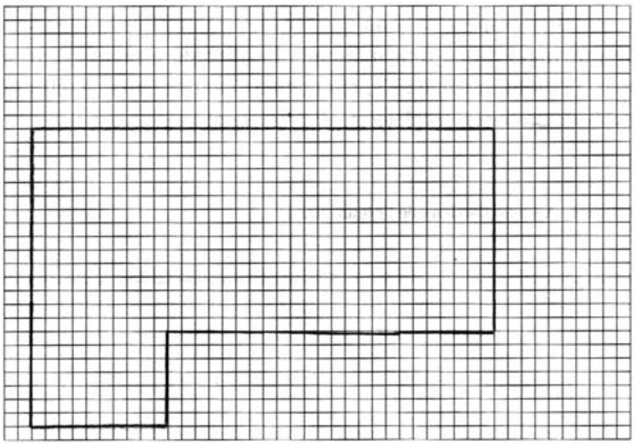
Activitat 4.4

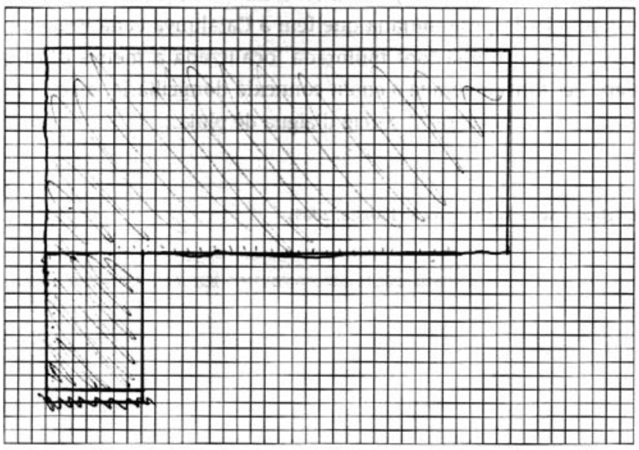
4 Com era el tros que va necessitar per al brick de **SUC FRESC**? Pinta'l en aquesta quadrícula.

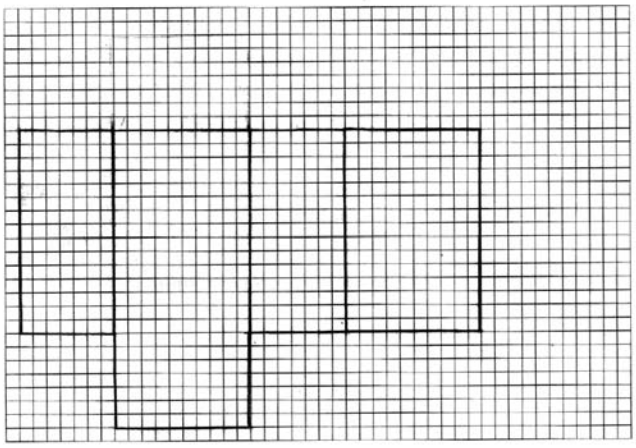


ESPAI I FORMA

Resposta 1





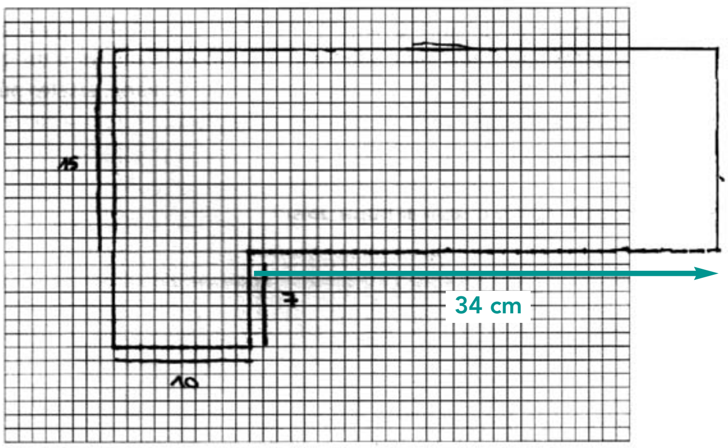


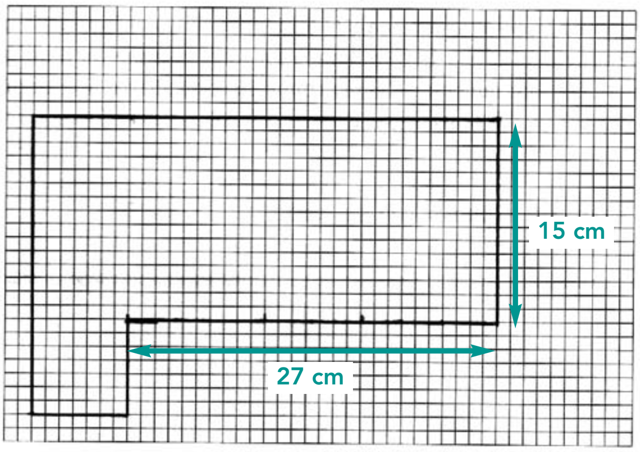
Els tres alumnes tenen una bona visualització del cos i despleguen la superfície del bric de tres maneres diferents i correctes.

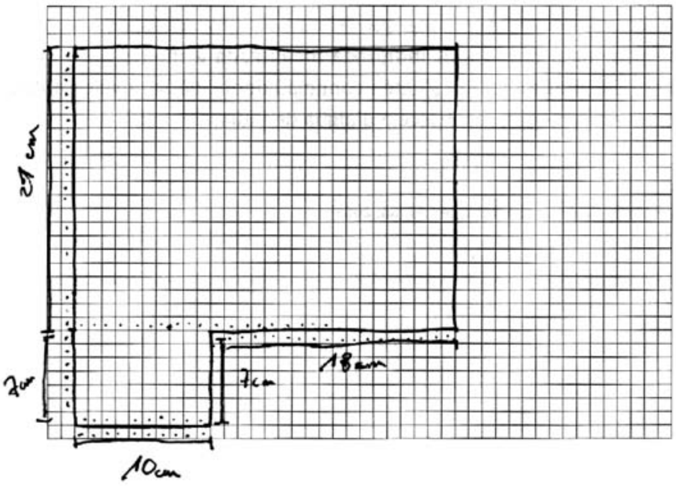
En el primer cas, se segueix fil per randa el model que es presenta en l'exercici anterior; en canvi, en el segon dels casos es gira la perspectiva de la base respecte de la vista amb què es presenta el bric al dibuix.

Finalment, en el tercer exemple, l'alumne defuig el model, identifica correctament les cares del bric i és a partir d'aquestes que fa el desplegament de la figura.

Resposta 2



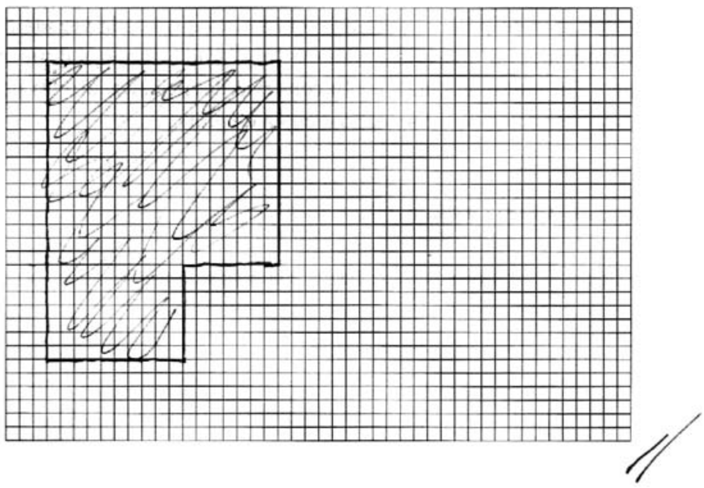




En aquests exemples se segueix el model desenvolupat en l'apartat anterior. Ara bé, en el primer cas es dimensiona incorrectament la superfície lateral del bric i es compta una cara dues vegades. En el segon exemple es dimensiona malament la base o es copia directament de la que es presenta en el model. I en el darrer dels exemples es barregen dades dels dos brics i no s'aconsegueix dibuixar correctament el desplegament que es demanava.

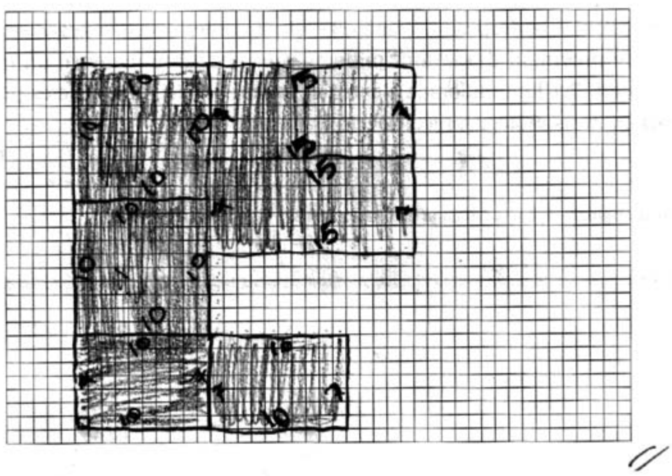
ESPAI I FORMA

Resposta 3



L'alumna no visualitza el cos i no comprèn què significa realitzar un desplegament.

Resposta 4



En aquest darrer exemple, l'alumne justifica el desplegament perquè es tracta de tota la superfície necessària, amb cares senceres, per a formar el bric sense haver de retallar cap cara.

Per tant, tot i tenir un error en la mesura d'una de les cares, en general té una visualització correcta de totes, però no entén correctament el que significa fer un desplegament i que la superfície compacta que en resulta no és el resultat d'enganxar les cares del cos de manera arbitrària.

Algunes consideracions sobre el procés d'aprenentatge de la geometria

És en el nostre entorn quotidià on trobem objectes, formes, dissenys i transformacions i on podem identificar les propietats geomètriques més significatives.

Les activitats de geometria que s'han treballat durant tota l'etapa d'educació primària ja acosten els alumnes a un coneixement més proper del seu entorn geomètric, però és en aquest primer cicle de l'educació secundària que cal consolidar-lo i afegir-hi un grau més de dificultat.

Aquest treball ha de ser una continuació del que han fet en l'etapa anterior i no l'han de reduir només a l'estudi d'algorismes per al càlcul d'algunes distàncies, superfícies i volums. Tot i les dificultats que es presenten en el càlcul del volum del bric i de l'àrea del desplegament en la prova, fonamentalment aquestes dificultats no són degudes solament a no haver treballat amb profunditat aquests algorismes de càlcul, sinó a no haver assimilat correctament els conceptes de volum i d'àrea d'un cos de tres dimensions.

En les dificultats de visualització espacial trobem l'origen de la majoria dels errors del desplegament. En el treball geomètric caldria donar força importància al plantejament de situacions en l'espai i a la manipulació de figures tridimensionals. En aquests primers anys de l'educació secundària s'ha de prioritzar la geometria espacial. El treball amb figures planes, tot i tenir la seva importància, ha de ser un suport per al treball en tres dimensions.

Amb experiències sensibles, visuals i tàctils, els nostres alumnes aconseguiran desenvolupar la visualització de les formes perquè més endavant, tot demanant anticipació a aquesta manipulació, puguin aprofundir la visualització de les relacions.

Aquesta percepció geomètrica és necessària per a comprendre situacions com la de la prova i, a més, els facilitarà el treball amb la geometria analítica del segon cicle i del batxillerat, ja que seran capaços d'imaginar-se les situacions problemàtiques que es plantegin.

Un cop s'han superat les etapes d'observació, actuació, reflexió i interiorització, és possible passar a l'abstracció.

El treball amb materials dins d'un ambient de laboratori, d'exploració i d'experimentació on l'alumne sigui el participant actiu del seu coneixement serà l'ambient ideal per a arribar als objectius anteriorment plantejats.

Per tal que els alumnes avancin en la percepció visual d'un cos, cal proposar primerament activitats que els permetin la construcció de cossos estàndard (poliedres i cossos rodons) i no estàndard (per exemple, l'ús de policubs) amb els quals es pugui realitzar un treball de descripció de propietats i característiques.

Després podran passar a la visualització de les vistes de cossos ja construïts sia físicament o visualment. Com a complement d'aquesta activitat tenim el desplegament de figures que es plantejava

en la prova, el qual ens permetrà veure si relacionen correctament:
• el desenvolupament pla de la figura i la figura tridimensional
• les característiques de la figura: nombre i forma de les cares
• la situació de la figura, que determina com van les cares laterals en el desplegament
• l'habilitat de dibuixar

També es poden fer servir paquets i miniaplicacions informàtiques específiques que treballin les diferents vistes de diferents figures i perspectives.

Finalment, per a aprofundir la visualització, podem treballar la construcció de cossos a partir de les seves vistes.

Cadascuna d'aquestes activitats, que parteixen de la manipulació, ha d'encaminar-se cap a una anticipació de les experiències, cap a una visualització mental de les situacions que finalment permetin als alumnes d'aquest cicle poder conjecturar i solucionar problemàtiques senzilles sense la necessitat de l'ús previ de materials. Tot i això, aquesta visualització mental no s'ha d'entendre com una «superació» de la manipulació, sinó com una capacitat diferent que l'alumne desenvolupa; el treball manipulatiu haurà de continuar essent present en l'activitat matemàtica de l'alumnat en totes les etapes.

Un bon aprofitament d'aquestes activitats ajudarà l'alumnat a poder resoldre futures dificultats en el treball espacial.

Pel que fa al càlcul de les àrees, els alumnes haurien de començar identificant les figures geomètriques i els seus elements més significatius. La verbalització en la descripció dels elements més significatius i de les seves propietats és una tasca que l'alumnat consolidarà en aquesta etapa.

Abans d'arribar al càlcul d'àrees simples mitjançant fórmules, és bo reforçar el càlcul mitjançant trames (geoplà), remarcar el caràcter multiplicatiu de les dues dimensions i la descomposició de les figures planes en d'altres figures planes més senzilles com ara quadrats o triangles.

El càlcul d'àrees per comparació amb la unitat, tot i ser un procediment vàlid i necessari per a introduir el concepte d'àrea i la relació amb les unitats, no és generalitzable especialment al càlcul de figures no estàndard.

En el primer cicle de l'educació secundària, els alumnes haurien d'haver assolit plenament aquest primer estadi del càlcul de superfícies per a passar a utilitzar altres procediments (compleció i descomposició) més avantatjosos i incorporar-los al seu coneixement.

El reforç del caràcter multiplicatiu de les dues dimensions s'ha de posar en contraposició amb el perímetre (addició) fent veure, per exemple, com figures amb el mateix perímetre poden tenir diferent superfície o a l'inrevés. És aquí on la majoria dels nostres alumnes s'equivoquen i on hauran de treballar amb atenció per a saber diferenciar perfectament àrea, longitud d'un costat i perímetre.

Finalment i no pas com a únic objectiu, arribaran a poder treballar l'ús de les fórmules i la justificació d'algunes.

En el cas del volum, perquè els alumnes avancin correctament en l'aprenentatge, primer caldrà unificar i precisar la definició de volum d'un cos i la seva estreta relació amb la capacitat.

La relació de les unitats dels dos conceptes també és un bon punt de partida, especialment aquelles que apareixen més sovint en la nostra vida quotidiana. Diuen que una imatge val més que mil paraules; així, doncs, mostrar de manera real que un cub d'1 dm de costat és equivalent a la capacitat d'un bric de llet o de suc d'1 L, sia amb sorra o amb aigua, pot ser la millor manera perquè no oblidin mai més aquesta equivalència.

D'altres equivalències poden ser treballades amb les llaunes de beguda (3 llaunes = 1 litre?), que, com a treball de consolidació, també ens poden servir per a veure la diferència entre volum i superfície (les noves llaunes de 33 cl tenen la mateixa superfície que les anteriors?) fins a mostrar que dos cossos amb el mateix volum poden tenir diferent superfície o a l'inrevés. El disseny actual ens pot aportar molts exemples més sobre això.

L'objectiu final de tot aquest aprenentatge és que els alumnes reconeguin la importància i la necessitat de lligar el concepte de volum amb el producte de les tres longituds o amb el producte d'una superfície per una longitud.

Igual que amb l'àrea, les trames o els ja esmentats policubs poden ser també molt útils per a la consolidació final d'aquest concepte.

Finalment, s'hauria d'arribar a una certa formalització del model a través de fórmules que facin avançar els alumnes cap a un procés de deducció formal.

De manera complementària a aquestes activitats d'àrees i volums és important el treball de propostes que desenvolupin la visualització de relacions de les propietats i característiques de les figures planes i espacials.

Sobre el desplegament, el càlcul de l'àrea i del volum

El següent qüestionari permet al professorat:

- Analitzar el treball que es duu a terme amb els alumnes per a l'aprenentatge de la geometria.
- Reflexionar sobre la metodologia més adient per a treballar-ho.
- Prendre decisions sobre la gestió docent per a afavorir l'aprenentatge de la geometria.

Es recomana començar responent la graella individualment i continuar amb una posada en comú en els departaments i en els equips docents a fi d'arribar a acords de millora.

Qüestionari

	A classe es proposen la realització d'activitats i el foment d'actituds com:	Molt sovint	Sovint	Alguna vegada	Gairebé mai
A.	**Pel que fa a la visualització**				
1.	Buscar figures geomètriques de l'entorn.				
2.	Analitzar els elements de les figures: cares, arestes, vèrtexs.				
3.	Discutir en grup i definir les característiques de les figures planes i espacials.				
4.	Imaginar i fer recobriments de cossos (embolicar).				
5.	Imaginar i dibuixar el desplegament de cossos i després fer el desplegament i construir el cos.				
6.	Trobar relacions geomètriques.				
B.	**Pel que fa a l'àrea i el volum**				
7.	Mesurar l'àrea de figures planes utilitzant tècniques diverses: quadriculació, triangulació, descomposició, fórmules...				
8.	Utilitzar les unitats de capacitat i volum més usuals indistintament i en contextos de la vida quotidiana.				
9.	Calcular la superfície de figures diferents que tenen el mateix perímetre i a l'inrevés.				
10.	Calcular la superfície de figures ortoèdriques que tenen el mateix volum i a l'inrevés.				
11.	Fomentar que els alumnes expliquin com fan les seves deduccions i que les sotmetin a debat.				
C.	**Pel que fa a l'ús de materials**				
12.	Utilitzar material manipulatiu per a la visualització de les formes del pla i de l'espai i la recerca de relacions.				
13.	Utilitzar material TIC per a la visualització de les formes del pla i de l'espai i la recerca de relacions.				
14.	Practicar diferents tècniques de dibuix: a mà alçada, instruments de dibuix, TIC.				

Una vegada estudiats els resultats de la graella, els departaments i els equips docents poden plantejar-se preguntes i arribar a acords sobre:

- quines de les propostes es treballen a les aules?
- com es treballen?
- fins a quin punt les diferents metodologies emprades per cada departament faciliten l'aprenentatge?
- quines no es treballen prou?
- quines es consideren prioritàries?
- des de quines àrees es poden treballar?
- en quins aspectes es pot incidir més adequadament, tenint presents les característiques específiques de cadascuna de les assignatures implicades?

Es recomana triar-ne algunes entre les que es considerin prioritàries, ordenar-les i planificar-ne l'aplicació. En la planificació cal incloure:

- com s'avaluaran? (quan, qui i com s'avaluaran).

Mesura

Introducció

Per a avaluar els aspectes relacionats amb la mesura, que queden recollits a la competència M3 (emprar amb precisió i criteri les unitats de mesura) i una part de la M4 (usar amb propietat instruments i tècniques per a mesurar), les proves Cb14 constaven d'una sèrie d'activitats d'entre les quals se n'ha seleccionat una en què conflueixen gairebé tots els continguts i processos relacionats amb la mesura que es treballen a 1r i 2n d'ESO.

Tot i que per a resoldre satisfactòriament aquesta activitat l'alumne també ha d'activar competències relatives a espai i forma i resolució de problemes, en aquest apartat s'analitzen bàsicament les competències relacionades amb la mesura.

Recíprocament cal assenyalar que també s'han trobat i analitzat problemes derivats de l'ús adequat de les unitats i dels canvis d'unitats en els apartats de «Numeració i càlcul», «Canvi i relacions», «Espai i forma» i «Resolució de problemes». Aquesta coincidència quedarà patent en les recomanacions finals sobre l'aprenentatge de la mesura.

Activitat 9.3: A partir d'un plànol fet a escala, cal deduir les mesures d'una habitació rectangular per tal de calcular-ne la superfície. El càlcul de la superfície s'ha de realitzar utilitzant l'escala numèrica del plànol, però també és possible un raonament per escala gràfica, perquè en el plànol hi apareix un objecte del qual es coneixen les dimensions.

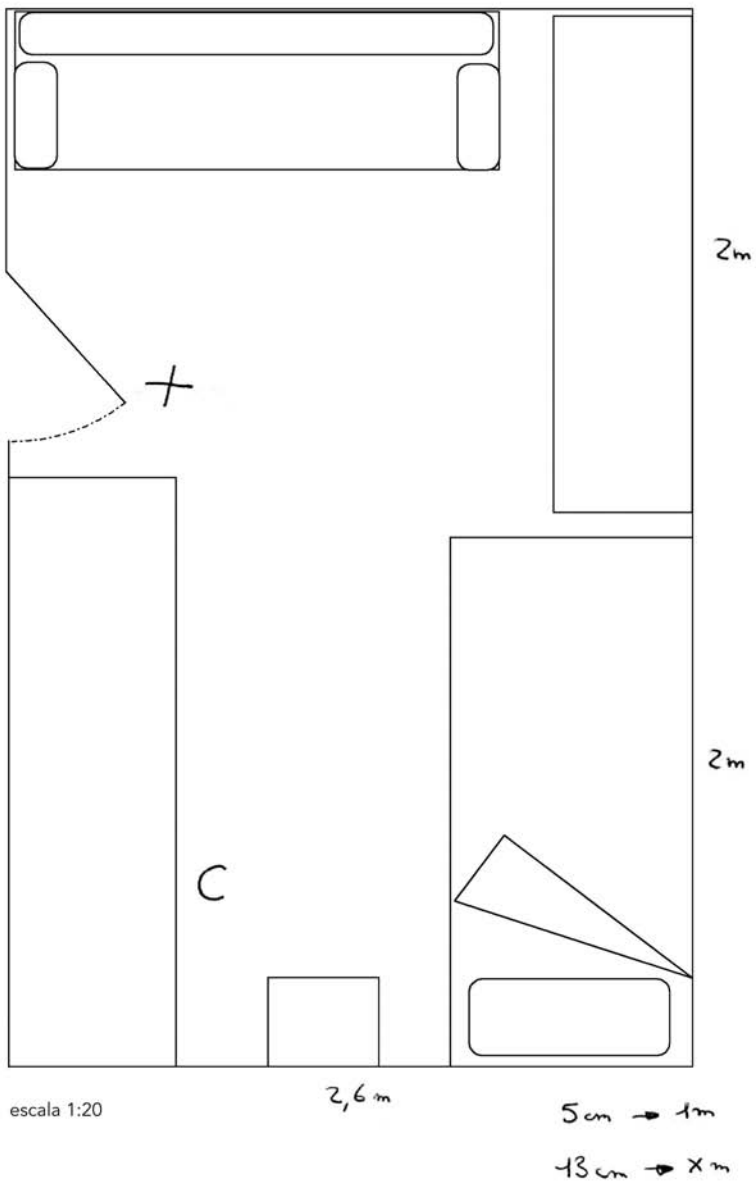
Per tal d'analitzar les dificultats que presenten els alumnes en resoldre cadascuna d'aquestes activitats, s'ha fet una tria de respostes correctes i incorrectes i s'ha intentat veure quina estratègia hi ha al darrere de cada resposta.

Activitat 9.3

L'enunciat de l'activitat és el que segueix:

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

Plànol de l'habitació d'en Marc



Per a resoldre satisfactòriament aquesta activitat, l'alumne necessita els continguts i processos següents:

- El concepte de superfície plana, que està íntimament relacionat amb el capítol «Espai i forma» i que ja ha estat analitzat en altres activitats.

- El càlcul de la superfície d'un rectangle és un procés que forma part de la mesura perquè relaciona longituds i àrees.
- El procés per a trobar les mesures reals dels objectes que apareixen en un plànol coneixent l'escala numèrica del plànol i usant correctament el regle.
- El procés que cal seguir per a trobar les mesures reals d'un objecte a partir de les mesures d'un altre objecte que també apareix al mateix plànol i del qual tenim les mesures reals.

Però l'alumne no necessita els continguts i processos aïlladament, sinó que ha de ser capaç de relacionar-los per a fer-ne un tot. Quan els relaciona i organitza està activant la capacitat de resoldre problemes, la qual, si bé s'analitza en un altre apartat, cal dir que és necessària també per a resoldre l'activitat 9.3.

L'activitat està plantejada amb prou dades perquè es pugui fer el pas del plànol a la realitat utilitzant l'escala numèrica o bé la comparació amb la mesura del llit. Es mostraran exemples dels diferents processos.

Els exemples estan ordenats en relació amb els continguts i processos que han utilitzat els nois i noies. En els quatre primers exemples s'analitzen dues respostes totalment correctes i dues més força coherents però en les quals l'alumne ha fallat en algun pas de la seqüència. Aquests dos darrers exemples mostren que, de tots els passos que ha de realitzar l'alumne per a resoldre l'activitat, el procés que li presenta més dificultat és l'ús de l'escala per a aconseguir les mesures reals de l'habitació.

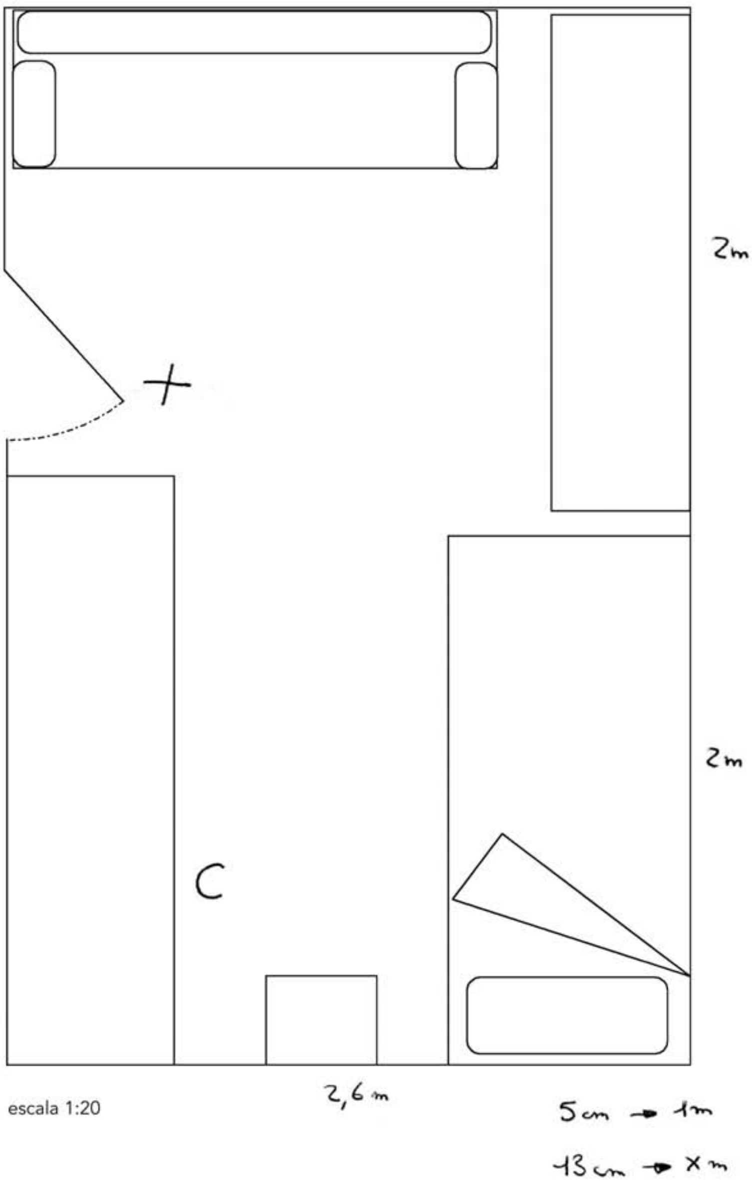
Resposta 1

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

$2{,}6 \times 4 = 10{,}4 \; m^2$

En el dibuix apareix l'estratègia que utilitza l'alumna per a arribar al 2,6 i al 4, que són les mesures reals de l'habitació.

Plànol de l'habitació d'en Marc



Resposta 2

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

10 cm = 2 m   4 × 2'6 = $\boxed{10'4\ m^2}$

llarg = 4 m

amplada = 2'6 m

Una altra manera d'utilitzar l'escala del plànol. Què ha fet l'alumna? Ha raonat que 1:20 representa que 10 cm del plànol són 2 m reals o bé ha utilitzat el fet que el llit, que mesura en el plànol 10 cm, fa en la realitat 2 m? A partir d'aquesta relació podem suposar que ha mesurat en centímetres amb un regle els costats de l'habitació i ha establert les proporcions corresponents per arribar a poder dir la llargada i l'amplada de l'habitació.

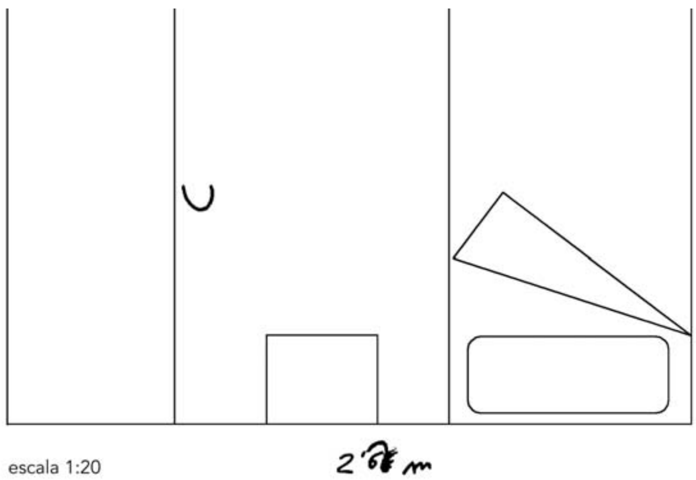
Resposta 3

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

10'6 (2'6·4)

L'alumne té clara la noció de superfície i de com s'ha de calcular. Sap fer el canvi d'escala i obté unes mesures de l'habitació força correctes, però té algun problema: no hi ha unitats i, a més, hi ha una mala interpretació de les aproximacions decimals i els nombres decimals periòdics. Quin sentit té dir que una de les mesures de l'habitació és 2,6 periòdic? Aquesta mesura apareix escrita per l'alumne en el plànol de l'habitació, com també el 4 que representa l'altra longitud.

Es mostra en la imatge parcial següent:



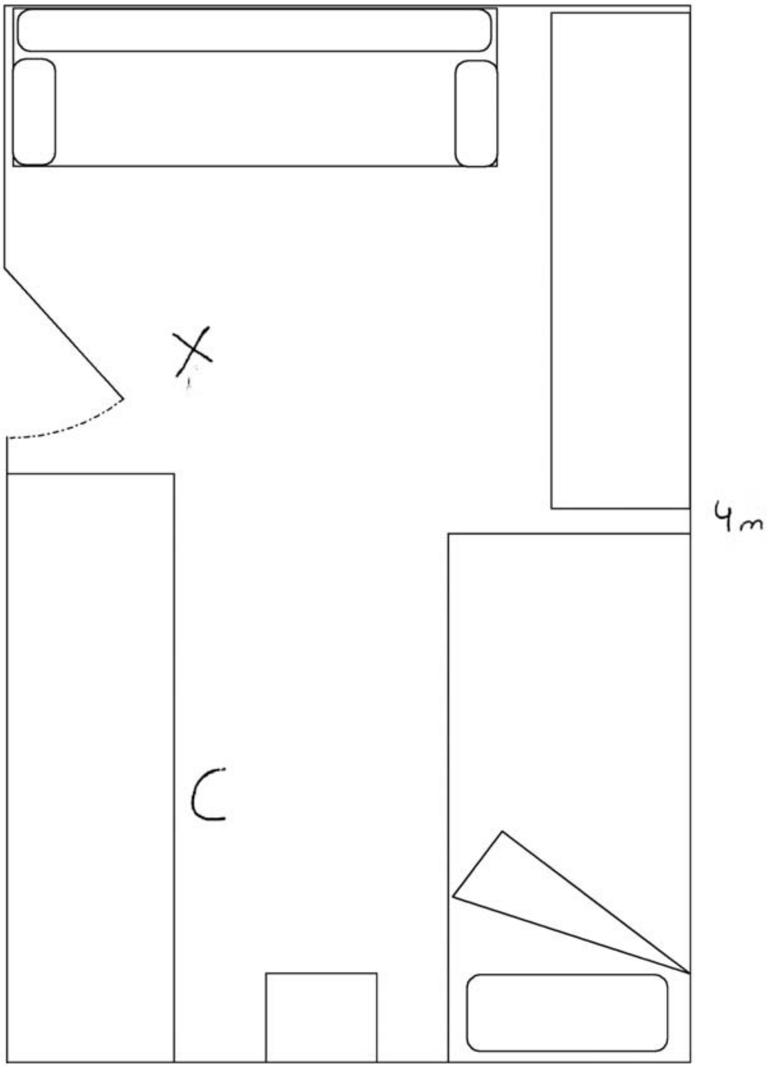
Resposta 4

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

4 m · 2'33m = 9'32 m²

L'alumne calcula bé la superfície, però a partir d'unes mesures errònies. Com es veu en el plànol, ha tingut problemes per a fer el canvi d'escala: de 13 cm del plànol ha passat a 2,33 m.

Plànol de l'habitació d'en Marc



escala 1:20 2'33

S'han trobat més casos en què els alumnes feien bé la conversió dels 20 cm del plànol als 4 m reals, però tenien problemes quan la mesura sobre el plànol passava a ser una mesura real amb decimals.

Així els 13 cm del plànol passaven a ser 2,33 m o 2,3 m en lloc dels 2,6 m que corresponien a la realitat.

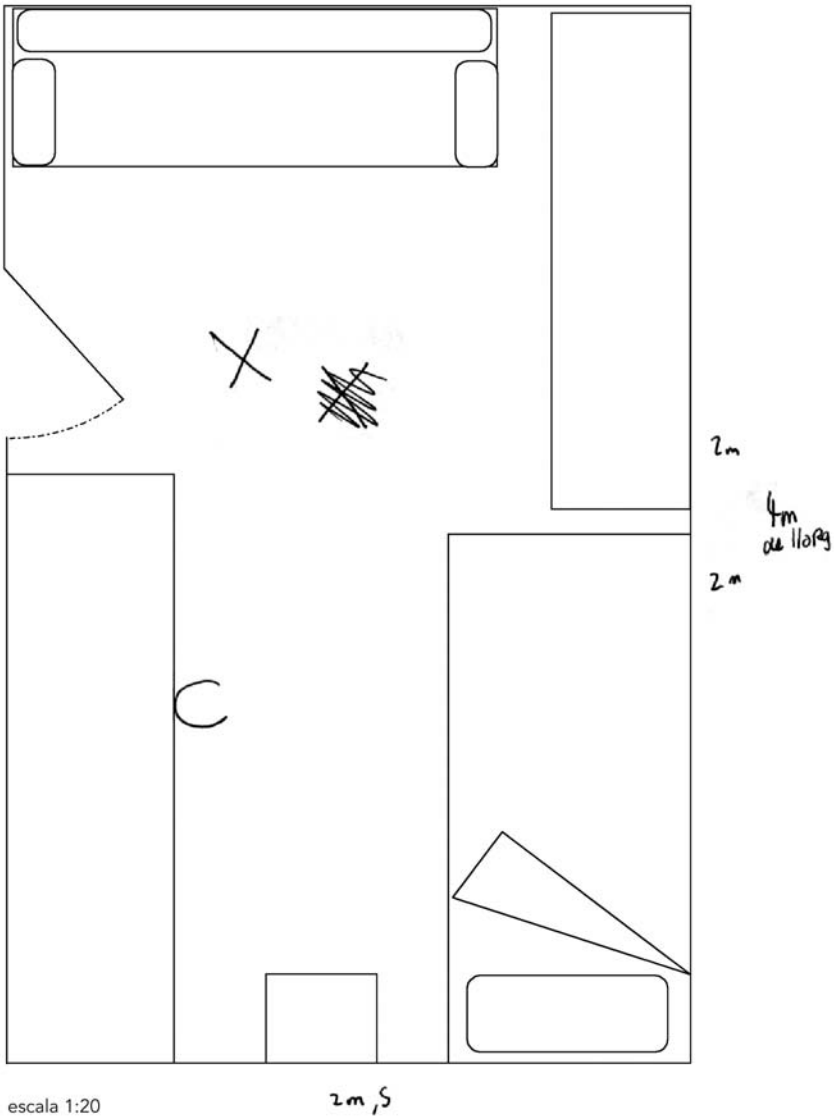
Resposta 5

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

$4 \times 2{,}5 = 10$ $\boxed{10 m^2}$

L'alumne sap calcular la superfície, però té problemes un altre cop amb el canvi d'escala. D'on surt el 2,5? El seu plànol ens dóna alguna pista:

Plànol de l'habitació d'en Marc



escala 1:20

Segurament no ha utilitzat l'escala numèrica, sinó que per comparació amb la mesura real del llit ha decidit la mesura del costat que li faltava. Si més no, la manera d'expressar la mesura (2m, 5) no sembla procedir d'un càlcul. L'alumne demostra tenir recursos malgrat que la solució no sigui prou bona perquè és aproximada.

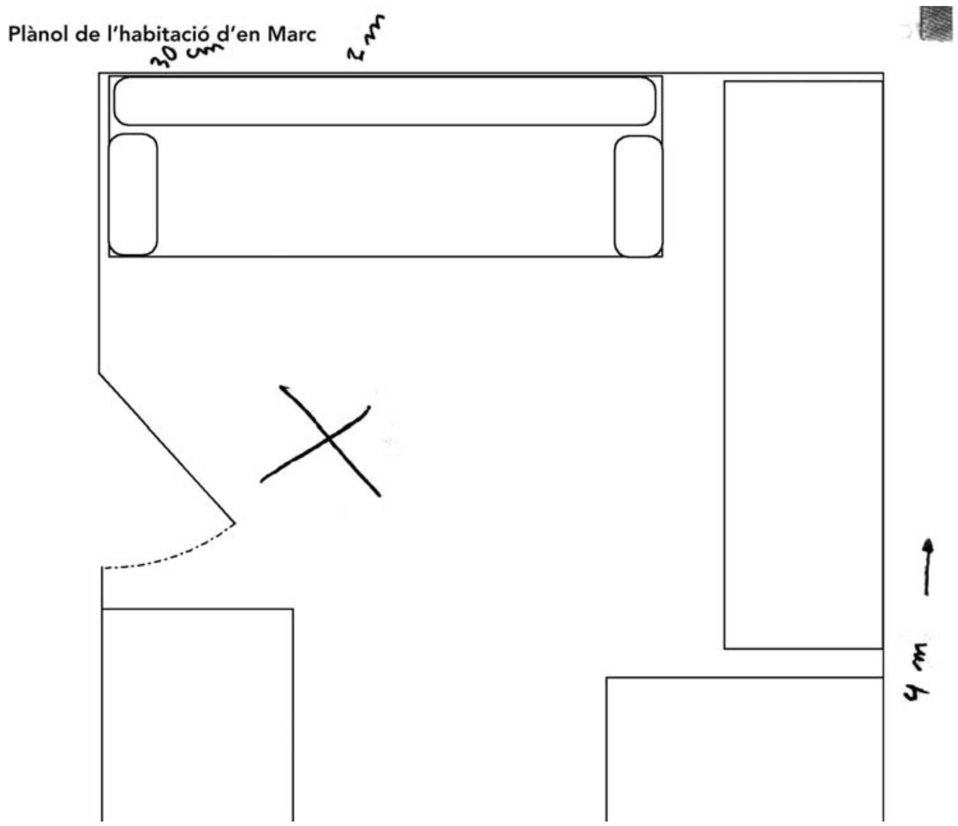
Els exemples següents tenen en comú la confusió entre àrea i perímetre:

Resposta 6

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

$4^2 + 2,3^2 = 18,3\ m^2$

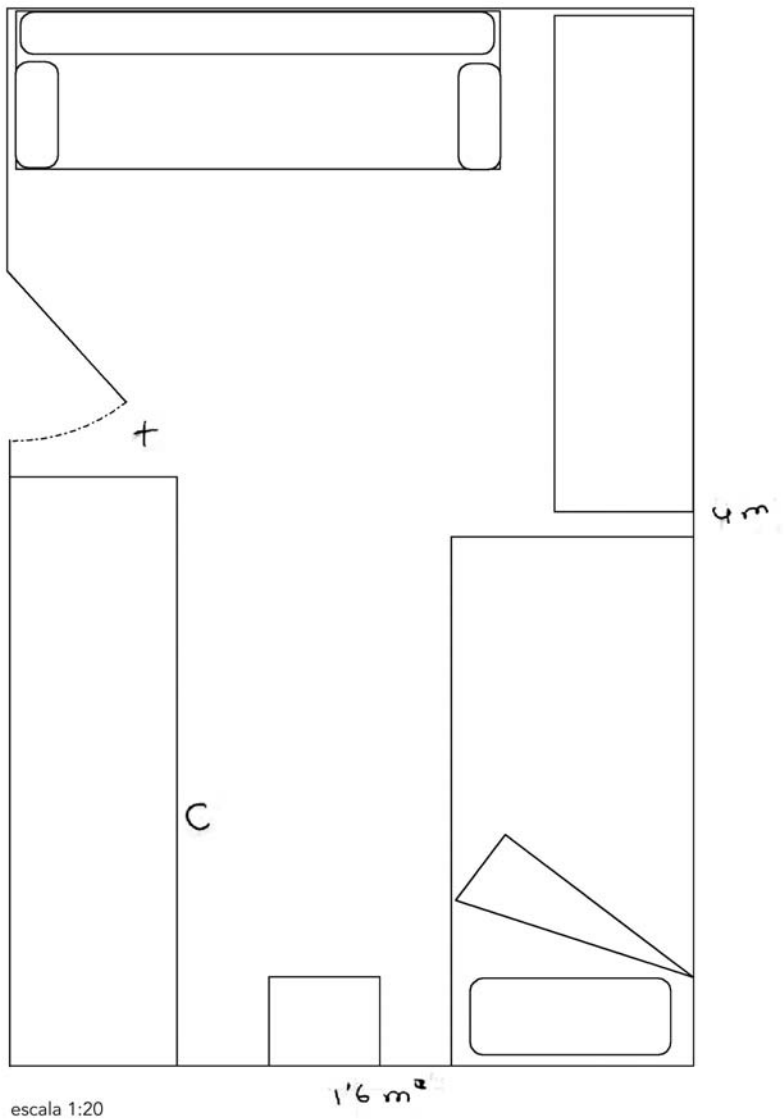
Un altre cop hi ha problemes amb el canvi d'escala. Damunt el plànol apareix clarament l'estratègia: la part sencera no presenta problemes: 10 cm són 2 m, però els 3 cm restants han provocat la confusió. És un canvi d'escala additiu: per una banda, els metres i, per l'altra, els centímetres, però en aquesta segona part no aplica el factor **escala** correctament. No hi ha noció que el canvi d'escala es pot fer amb una sola operació, un producte.



Però, a més, l'alumne no té clar el concepte de superfície i no sap com es calcula. Ha memoritzat regles de càlcul i ha fet una barreja d'operacions. Eleva al quadrat perquè així pensa que calcula una superfície, però de què? Què representa en el dibuix 4^2 i $2,3^2$? I després ho suma. Així ha utilitzat totes les dades.

Resposta 7

Plànol de l'habitació d'en Marc



Hi ha problemes d'escala per a obtenir l'amplada de l'habitació: els 13 cm s'han convertit en 1,6 m.

Però, a més, l'alumne no ha calculat l'àrea, sinó el perímetre de l'habitació:

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

La superfície de la seva habitació es de 11'2 m²

$1'6 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 3'2 + 8 = 11'2\ m^2$

Resposta 8

3 Calcula la superfície en m^2 de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

Fa aproximadament 12m

El resultat prové de : 4 + 4 + 1,5 + 1,5
Un altre cop un càlcul de perímetre i ara, coherent amb els càlculs, les unitats són de longitud.

Dels tres darrers casos cal destacar el fet que els alumnes continuen tenint problemes per a trobar l'equivalència entre el costat de 13 cm en el plànol i la seva mesura real. Tots han estat capaços de trobar els 4 m, però el que no se sap és si han utilitzat l'escala o la comparació amb el dibuix; l'habitació feia a simple vista 2 llits de llarg: per tant, 4 m.

Els exemples següents corresponen a alumnes que tenen certa noció de superfície i saben com calcular-la, però no han estat capaços de prendre, sobre el plànol, les mesures adients i fer els canvis d'escala. Han trobat una superfície que no es correspon amb la demanada.

Resposta 9

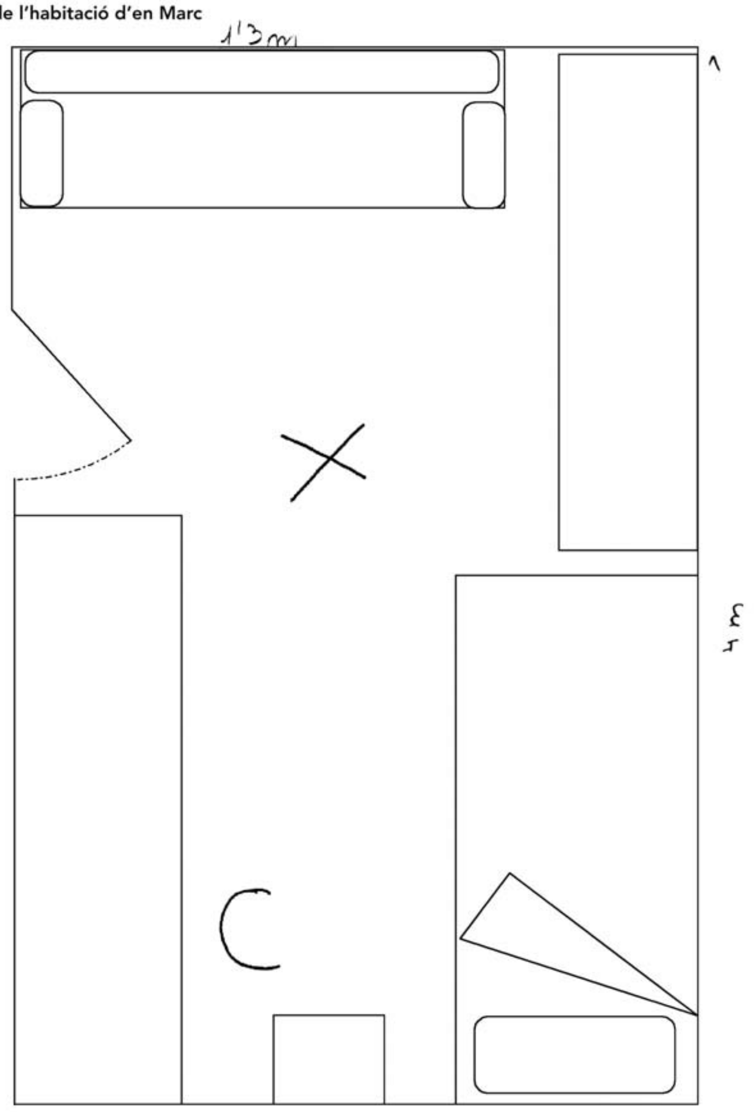
3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

5'2 m²

El plànol de l'alumna dóna idea del seu raonament. Els 4 m són correctes, hi ajuda el fet que la longitud en el plànol és exactament 20 cm, o potser el raonament s'ha fet per comparació amb les mesures reals del llit.

En canvi, 1,3 m d'amplada per a l'habitació denota que l'alumna no ha fet servir l'escala: dels 13 cm del dibuix ha passat a 1,3 m. L'alumna no ha comparat l'amplada de l'habitació amb les mesures del llit; si ho hagués fet, veuria la incoherència de la seva resposta dient que l'amplada és 1,3 m.

Plànol de l'habitació d'en Marc



escala 1:20

Resposta 10

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

$2 \times 20 = 40\ m^2$

2 correspon a la longitud del llit.

20 és el factor escala.

L'alumna ha utilitzat les dades que té més a mà. Ha memoritzat que, per a calcular una àrea, s'han de multiplicar dues dades i ho ha fet amb les que té més a l'abast. El fet mostra que l'alumna no té la noció d'àrea, ja que el càlcul caldria fer-lo amb unes mesures que tinguessin relació amb l'àrea demanda i no és el cas. És un error força habitual en els alumnes quan se'ls planteja una situació concreta: calculen a partir de les dades que apareixen en el problema sense contextualitzar la situació ni vetllar per la coherència dels resultats obtinguts.

Els exemples següents corresponen a alumnes que, malgrat no saber fer anar l'escala del plànol i no arribar a calcular la superfície, sí que han estat capaços de donar unes mesures raonables de l'habitació. S'analitza com ho han fet. En dos casos han estat capaços d'aprofitar les mesures del llit per a dir que una de les longituds és 4 m.

Resposta 11

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

La seva habitació fa 4m de llargada i 2 d'amplada.

No es té constància del raonament de l'alumna. Es pot suposar que aprofita el fet de tenir la llargada del llit, 2m; observa en el dibuix que el llit ocupa la meitat d'un costat i que, per tant, aquest costat ha de fer 4 m. L'amplada la dóna per aproximació a vista.

L'alumna té recursos propis per a resoldre situacions, és capaç de donar unes mesures força coherents, tot i que li manquen els coneixements necessaris per a resoldre més acuradament el que se li ha demanat.

Resposta 12

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

4 m² de llarg i 2'5 m d'ample

Un exemple molt semblant a l'anterior. En aquest cas l'alumne ha fet un pas més: l'amplada no és 2, sinó que hi apareix un decimal que acosta més el valor al real. Per a la llargada, però, utilitza una unitat incorrecta.

Resposta 13

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

13'5 m² i de llarg 4m²

A més del problema amb les unitats, en aquesta resposta hi ha una barreja entre les mesures reals i les mesures en cm del dibuix. No ha fet servir l'escala. El 13,5 és la mesura en cm del costat més petit i, a més, no és gaire correcta perquè en realitat és quasi 13. Per què ha emprat unitats de superfície? Segurament per associació amb les unitats que apareixen en la pregunta i que indiquen que les superfícies duen aquestes unitats. S'ha perdut en tot el procés, però ha donat les unitats com s'espera que les doni.

En els darrers exemples, els alumnes presenten confusions múltiples entre els conceptes i processos que calia mobilitzar per a resoldre la situació plantejada.

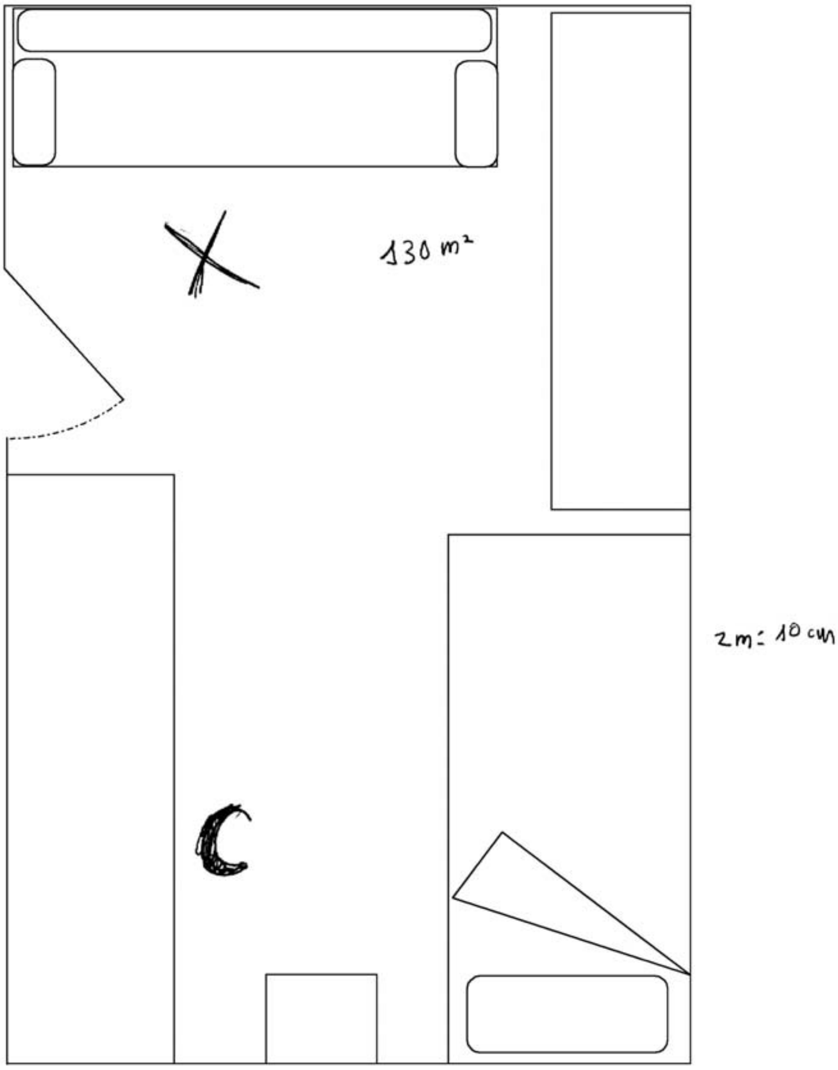
Resposta 14

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

130 m²

L'alumne calcula la superfície amb 13 i 10: 13 és la mesura en cm de l'amplada de l'habitació sobre el plànol; 10 és la mesura en cm del llit, com indica l'alumne en el dibuix, on sembla perdre de vista que cal mesurar l'habitació sencera i no pas el llit. La resposta mostra que l'alumne té una confusió important amb el significat de les dades que està manipulant.

Plànol de l'habitació d'en Marc



escala 1:20

Resposta 15

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

6 0 7 m² de superFicie

L'alumne segurament dóna aquest resultat totalment a ull.

Resposta 16

3 Calcula la superfície en m² de l'habitació d'en Marc, sabent que el seu llit fa 2 m de llarg.

2 m x 2 costats = 4 m² de llarg

Aquest alumne utilitza els nombres que té més a mà i que apareixen en la pregunta: 2 m del llit. És una pràctica habitual en els alumnes que no tenen prou habilitats per a resoldre les situacions plantejades. Multiplica per 2 i parla de «llarg». Està buscant la llargada de l'habitació?

Escriu unitats de mesura de superfície influït segurament perquè les ha vistes en la pregunta. Una altra explicació seria que creu trobar la superfície perquè multiplica dues quantitats, tot i que una és una mesura i l'altra, el nombre de costats que caldria multiplicar.

Algunes consideracions sobre el procés d'aprenentatge de la mesura

En arribar al primer cicle de l'ESO, els alumnes ja tenen moltes experiències de l'etapa anterior i de la vida diària pel que fa al tema de la mesura. A partir d'aquestes experiències formals i informals, caldria que fossin capaços de continuar construint el seu coneixement sobre la longitud, l'àrea i el volum, i les unitats i els sistemes de mesura.

Aspectes rellevants que cal tenir presents per a aquesta etapa són: elegir i utilitzar unitats d'acord amb les característiques que es volen mesurar, estimar mesures, seleccionar unitats i escales apropiades d'acord amb la precisió desitjada, i resoldre problemes sobre càlcul de perímetres i àrees de figures bidimensionals, i també sobre càlcul d'àrees i volums d'objectes tridimensionals. Els alumnes també haurien de ser eficients en la mesura d'angles i en l'ús de raons i proporcions per a resoldre problemes sobre escales, semblança i magnituds derivades. Molts d'aquests aspectes apareixen en l'activitat 9.3.

En l'anàlisi de l'activitat s'ha evidenciat la relació entre mesura i altres blocs del currículum. Aquesta situació fa pensar que els conceptes i habilitats relacionats amb la mesura es poden tractar durant tot el curs escolar en lloc de treballar-se com una unitat per separat.

Molts temes de mesura estan íntimament relacionats amb el que els alumnes aprendran d'espai i forma (perímetres i àrees), de canvi i relacions (proporcionalitat geomètrica i escales) i d'estadística i atzar (recollida i mesura de dades amb les unitats corresponents), i fins i tot molts conceptes i habilitats relatius a la mesura es poden aprendre i aplicar en l'estudi d'altres àrees del currículum (ciències naturals, ciències socials, tecnologia, educació visual i plàstica i educació física).

Es consideren a continuació diversos aspectes que cal tenir en compte a l'hora de planificar el procés d'aprenentatge sobre la mesura i que han aparegut com a indispensables per a resoldre l'activitat analitzada.

La mesura de figures dibuixades sobre un paper

Cal pensar que mesurar figures dibuixades en un paper és una destresa o habilitat que els alumnes ja tenen en arribar a l'educació secundària. Potser el més important és que no perdin l'hàbit d'emprar estris de mesura, especialment el regle graduat i el transportador d'angles. En ocasions un càlcul a partir d'un dibuix pot ser una primera aproximació i pot ajudar a pensar una solució més elaborada i complexa.

Les mesures experimentals reals

El treball de mesura experimental, ja iniciat en l'educació primària, no ha de limitar-se a la mesura sobre paper. És imprescindible que l'alumnat realitzi experiències (embolicant, omplint, relacionant…) que assegurin el desenvolupament intuïtiu (en definitiva, la capacitat d'estimació) de mesures reals: paper per a embolicar, ampolles, olles, prestatges, armaris… També poden usar-se jocs que són habituals a l'aula de matemàtiques. Així, en un tangram, que s'utilitza sovint per a treballar la geometria, poden estudiar-se les relacions entre les mesures de les diverses peces. La pràctica de les mesures reals, amb el desenvolupament de la capacitat d'estimació, ha d'estendre's als mètodes indirectes, que esdevindran essencials en els treballs de camp.

Les mesures reals d'una figura o objecte dibuixats a escala

Aquesta és una situació que té més a veure amb la proporcionalitat geomètrica i la semblança però que, per la seva importància en tot el càlcul de mesures indirectes, no es pot obviar. Quan els alumnes mesuren un objecte, el resultat ha de tenir sentit; les estimacions i les referències poden ajudar els alumnes a reconèixer quan és raonable una mesura. Aquesta mateixa consideració també s'ha de fer quan la mesura no és el resultat d'una mesura directa, sinó que és el resultat d'una mesura indirecta; en el cas que ens ocupa és el resultat de mesurar directament en el plànol i després calcular, d'acord amb l'escala, la mesura real.

La construcció o interpretació de dibuixos a escala

Els problemes relatius a la construcció o interpretació de dibuixos a escala ofereixen oportunitats per a utilitzar i incrementar el coneixement de la semblança, la raó i la proporcionalitat. Aquests problemes tenen diverses fonts: mapes, plànols, activitats científiques i fins i tot la literatura. Per exemple, en els *Viatges de Gulliver*, novel·la de Jonathan Swift, molts passatges suggereixen problemes relacionats amb escales, semblances i proporcionalitat.

Prendre mesures de la classe, del pati de l'institut, de la pròpia habitació i decidir després a quina escala cal fer el plànol perquè càpiga en un full DIN A4 i sigui una escala eficaç, en què el canvi realitat-dibuix i viceversa sigui ràpid i, si pot ser, amb càlcul mental, són exemples d'activitats que poden ajudar l'alumne en la comprensió de la utilització de plànols i escales.

La relació entre longitud, àrea i volum

Tot i que els alumnes ja han iniciat en l'etapa d'educació primària l'estudi dels conceptes d'àrea i volum, molts necessiten experiències addicionals amb mesures directes per a aprofundir la comprensió de l'àrea de figures de dues dimensions i l'àrea i el volum d'objectes tridimensionals. Fins i tot en aquesta etapa pot ser adequat per a molts alumnes mesurar àrees recobrint superfícies i calcular volums interiors d'objectes omplint-los de líquid. Amb aquestes experiències es pot ajudar els alumnes a clarificar conceptes relacionats amb la mesura. Molts alumnes experimenten certa confusió sobre per què s'utilitzen els quadrats unitaris i els cubs unitaris per a mesurar àrees i volums si les figures no són quadrades i els cossos no són cúbics. Passar prematurament a utilitzar fórmules, sense tenir una base conceptual adequada d'àrea i volum, porta a molta confusió, com s'ha vist en l'anàlisi de l'activitat. Alguns alumnes simplement havien memoritzat que calia multiplicar dos nombres, però els que utilitzaven no tenien res a veure amb les dimensions de l'habitació. Sempre que sigui possible, els alumnes hauran de desenvolupar fórmules i procediments significatius a través d'investigacions en lloc de memoritzar-los.

La diferència entre àrea i perímetre d'una superfície plana

S'ha constatat en l'anàlisi de l'activitat que alguns alumnes calculaven el perímetre pensant que estaven calculant l'àrea. La pràctica de mesurar objectes pot ajudar els alumnes a desenvolupar una bona comprensió de les relacions entre les diferents mesures d'un objecte i les unitats més apropiades per a mesurar-los. També en aquest sentit molts alumnes tenen la falsa idea que figures de dues dimensions amb la mateixa àrea tenen el mateix perímetre; calen activitats de mesura directa per a enfocar i corregir aquesta concepció. Un cop analitzada la diferència amb activitats manipulatives es podrà passar a una segona etapa amb càlculs d'àrees i perímetres de figures diverses.

Estimar mesures

En la pràctica dels alumnes caldrà utilitzar referències per a estimar mesures i contrastar-les amb el resultat d'un procés de càlcul. En qualsevol procés de resolució d'un problema o situació, és important que els alumnes adquireixin l'hàbit de ser crítics davant el resultat obtingut, tant si és el resultat d'un càlcul fet mentalment, a mà o amb mitjans tècnics. Cal que tornin a la situació de partida i analitzin si el resultat és coherent i té sentit a partir del que s'ha demanat. En el cas de situacions en què apareixen mesures, directes o indirectes, com és el cas analitzat, l'alumne hauria de ser capaç de rebutjar certs resultats finals i també resultats intermedis. Recordem, per exemple, el cas analitzat en la resposta 9: l'alumne donava unes mesures de l'habitació damunt el plànol (4 m x 1,3 m) que no tenien sentit si es fixava en el referent del llit, de 2 m, que apareixia en el dibuix; el llit que ell deia mesurar era més curt, 1,3 m.

El treball de camp

L'aprenentatge de la mesura comporta dos vessants:
- fer-se una idea del que es vol mesurar i decidir quina és la unitat més convenient
- mesurar correctament, utilitzant tècniques, instruments i fórmules adients

El treball de camp reuneix amb molta naturalitat aquests dos vessants, per això cal tenir-lo present a l'hora de parlar de l'aprenentatge de la mesura. Plantejar alguna situació en què els alumnes, en petits grups de tres o quatre, prenguin mesures sobre el terreny, experimentin quines dificultats han de superar per a prendre mesures, triïn unitats, instruments per a mesurar, etc. i després hagin de decidir com representen acuradament damunt el paper tot el que s'ha mesurat, és una activitat molt completa que servirà per a treballar la mesura en tota la seva amplitud.

A més, el treball de camp és una bona ocasió per a fomentar el treball interdisciplinari amb altres àrees. Es pot sortir a prendre mesures i elaborar plànols per a ciències naturals o per a educació física. Després es pot cloure el procés amb un informe detallat elaborat a la manera dels informes del laboratori que es redacten per a ciències naturals.

Sobre l'aprenentatge de la mesura

El següent qüestionari permet al professorat:

- Analitzar les activitats que es porten a terme per a l'aprenentatge de la mesura a través de la seva inclusió en diferents blocs del currículum al llarg del curs.
- Reflexionar sobre la metodologia més adient per a treballar en el marc de l'aula amb aquesta finalitat.
- Prendre acords i decisions sobre la gestió docent que el professorat deia prendre en consideració per afavorir l'aprenentatge de la mesura.

Es recomana que cada professor/a respongui aquest qüestionari individualment i que després, en una segona fase, es faci una posada en comú i es discuteixi en els departaments i en els equips docents a fi d'arribar a acords de millora.

Qüestionari

	A classe es proposen la realització d'activitats i el foment d'actituds com:	Molt sovint	Sovint	Alguna vegada	Gairebé mai
A	**Espai i forma: càlcul de perímetres i d'àrees**				
1	Estimar mesures d'objectes i d'espais propers, l'aula o el pati, que després es mesuraran i d'altres espais més grans que després no es mesuraran (per exemple, un camp de futbol).				
2	Practicar tot el procés de prendre mesures: decidir unitats, instruments, realitzar la mesura, comparar el resultat amb l'estimació inicial i amb els resultats obtinguts per altres companys.				
3	Mesurar àrees recobrint superfícies, sobreposant quadrícules amb trames de més o menys densitat de quadrícula.				
4	Mesurar perímetres amb cordes o cordills, tant sobre el paper com en espais propers, i analitzar després les regularitats i regles trobades en relació amb la forma geomètrica de l'espai mesurat.				
5	Comparar perímetres i àrees de figures que tenen la mateixa àrea però no el mateix perímetre i viceversa.				
6	Treballar estratègies de descomposició de figures per a calcular perímetres i àrees sense memoritzar fórmules.				
B	**Canvi i relacions: escales**				
7	Llegir mesures d'objectes representats a escala i analitzar si el valor trobat és possible.				
8	Representar amb l'escala més adequada l'aula, la pròpia habitació, el pati de l'institut…				
9	Situar en els plànols anteriors objectes dibuixats també a escala, taules, cadires...				
10	Deduir escales de plànols o mapes a partir del reconeixement d'algun objecte del qual es coneixen les mides reals.				
11	Calcular la superfície d'un pis en un plànol fet a escala.				
12	Comparar resultats amb els companys i analitzar les possibles fonts d'errors.				
C	**Estadística i atzar: unitats de mesura**				
13	En el procés de recollida de dades per a confeccionar una estadística, decidir les unitats més adients, el nombre de dades que cal recollir i l'instrument més adequat per a fer-ho.				
14	En el procés de càlcul de mitjanes i medianes, vetllar per la coherència del resultat i de les unitats de mesura utilitzades.				
D	**Altres àrees de currículum**				
15	Llegir i interpretar plànols utilitzats en l'àrea de ciències naturals, ciències socials...				
16	Realitzar informes de presa de mesures i elaboració de plànols de manera semblant als realitzats per a les pràctiques del laboratori.				

Una vegada estudiats els resultats de la graella, els departaments i els equips docents poden plantejar-se preguntes i arribar a acords sobre:

- quines de les propostes es treballen a les aules?
- com es treballen?
- fins a quin punt les diferents metodologies emprades per cada departament faciliten l'aprenentatge?
- quines no es treballen prou?
- quines es consideren prioritàries?
- des de quines àrees es poden treballar?
- en quins aspectes es pot incidir més adequadament, tenint presents les característiques específiques de cadascuna de les assignatures implicades?

Es recomana triar-ne algunes entre les que es considerin prioritàries, ordenar-les i planificar-ne l'aplicació. En la planificació cal incloure:

- com s'avaluaran? (quan, qui i com s'avaluaran).

Interpretació i ús del llenguatge matemàtic

Per a avaluar els aspectes relacionats amb la interpretació i l'ús del llenguatge matemàtic, que queden recollits en la competència M6, les proves constaven d'una sèrie d'activitats de les quals se n'han seleccionat tres: una on la informació essencial estava recollida en un gràfic, activitat 1 (Experiència al laboratori), una altra on la informació calia extreure-la de mapes i gràfics alternativament, activitat 2, apartat 6 (L'excursió), i una altra amb diagrames de barres i gràfics (climogrames), activitat 13 (Com és el teu país?).

De tota manera, cal remarcar que aquestes activitats també requereixen activar les competències L11 (comprensió escrita) i SC21 (recerca i selecció d'informació). La combinació de totes tres, per bé que les d'àmbit matemàtic siguin més rellevants, condueix a la resolució de l'exercici amb correcció.

Activitat 1: Comporta la lectura i interpretació d'un gràfic alhora que estableix la capacitat per a calcular i entendre el concepte de variació mitjançant la lectura del gràfic. En aquesta activitat, l'alumne ha de fer una bona lectura del gràfic i interpretar els dos eixos com a temperatura i temps respectivament. Per altra banda, per a respondre l'apartat 2 de la primera pregunta, li cal establir un raonament a partir de la lectura del gràfic i utilitzar els connectors adients per a expressar la seva resposta.

Activitat 2.6: Comporta la lectura d'un mapa de corbes de nivell, la interpretació del recorregut d'un itinerari concret, el de l'excursió, i la identificació d'aquest recorregut entre tres recorreguts possibles que es mostren amb gràfics de perfils. L'alumne ha de comparar les dades del mapa, que li proporciona la informació a partir de les corbes de nivell, amb les del gràfic, que li dóna l'evolució en el temps de les diferents alçades recorregudes, tot i que a l'eix horitzontal no aparegui explícitament el temps.

Activitat 13: Comporta la lectura dels climogrames i, per tant, l'alumne ha de diferenciar els dos eixos d'ordenades, dret i esquerre, i fer una bona lectura de les unitats de cadascun. Ha de tenir presents els coneixements de què disposa sobre climes. Els climes de la Terra són un tema propi del primer cicle de l'ESO. Els climogrames es treballen com a element que recull les característiques d'aquests climes i com a ajuda per a identificar-los.

Des del punt de vista de la interpretació i l'ús del llenguatge matemàtic, els punts i les barres es presenten com a parells ordenats d'informació que l'alumne ha d'interpretar per a poder fer els exercicis. Atès que la informació numèrica que els gràfics proporcionen és poc precisa, cal que l'alumne treballi per aproximació; per tant, la lectura acurada i atenta és imprescindible per a la resolució correcta.

Per tal d'analitzar les dificultats que presenten els alumnes en resoldre cadascuna d'aquestes activitats, s'ha fet una tria de respostes correctes i incorrectes i s'ha intentat veure quina estratègia hi ha al darrere de cada resposta.

Com que en aquestes activitats no sempre es demanava als alumnes que justifiquessin les respostes, observant-les s'han fet diverses hipòtesis sobre les probables estratègies de resolució, que finalment s'han contrastat amb entrevistes individuals a alguns alumnes resolutors.

Activitat 1: Experiència al laboratori

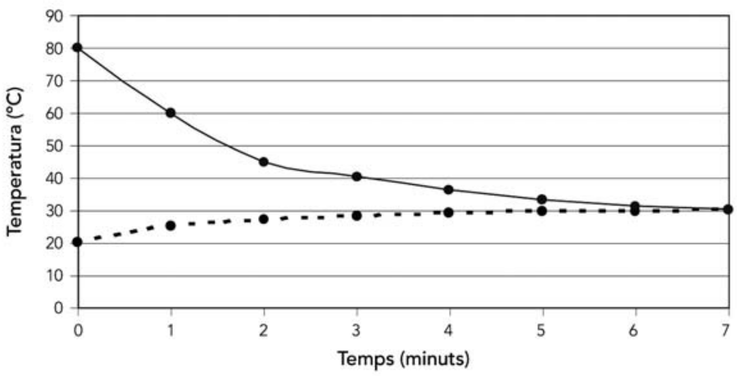
L'activitat està centrada en la interpretació del gràfic de temperatura de les dues aigües que entren en contacte. Paral·lelament a una interpretació estrictament quantitativa de la informació, es demana també una interpretació més qualitativa en algunes propostes, tot requerint la formulació d'hipòtesis.

Apartat 1

(en cursiva les respostes dels alumnes sense cap modificació)

EXPERIÈNCIA AL LABORATORI

Introduïm un tub d'assaig amb aigua calenta en un gerro d'aigua a temperatura ambient i posem un termòmetre dins de cadascun d'aquests dos recipients. Les temperatures que hem pres estan reflectides en el gràfic següent:



1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

....

b. Com ho saps?

....

Respostes correctes

Resposta 1

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La vermella.

b. Com ho saps?

Per que l'aigua del tub d'assaig es la més calenta per tal es la linia més elevada.

Resposta 2

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La temperatura de l'aigua del tub d'assaig està representada de color vermell

b. Com ho saps?

Perquè l'aigua calenta amb contacte amb la de temperatura ambient es refreda una mica hi ha la gràfica la que disminueix és la vermella

Resposta 3

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La linia vermell.

b. Com ho saps?

Ho se perqué Als 0 minuts està a una gran temperatura ~~[illegible]~~ i mentre pasen els minuts va disminuint.

Resposta 4

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La de color vermell

b. Com ho saps?

Per que dins del tub d'assaig l'aigua està calenta hi la vermella marca que estava a 80°C

En aquestes respostes, els alumnes combinen els coneixements previs i la lectura visual del gràfic i utilitzen aquesta informació per a argumentar la resposta.

Resposta 5

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La vermella.

b. Com ho saps?

Perquè l'aigua del tub d'assaig és calenta, té més temperatura i per tant més graus.

Resposta 6

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

(~~La blava de porttlat~~ la vermella

b. Com ho saps?

perque la temperatura ambient no pot ser 80° i si l'escalfes puja no baixa.

Resposta 7

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La línia vermella.

b. Com ho saps?

Perquè la temperatura de l'aigua calenta és més elevada que la de ~~la temper~~ l'aigua ambient.

Resposta 8

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La vermella

b. Com ho saps?

perque es va refredant

Resposta 9

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La vermella

b. Com ho saps?

Perque l'aigua està calenta, i al posar-la amb aigua a temperatura ambient, l'aigua del tub es refreda.

INTERPRETACIÓ I ÚS DEL LLENGUATGE MATEMÀTIC

De la 5 a la 9 els alumnes argumenten la resposta, però no utilitzen en els seus arguments aspectes d'informació extrets de la lectura del gràfic. Se sobreentén que l'han fet servir per a raonar la resposta, però no ho fan palès. Malgrat que l'objectiu de l'activitat no pretén avaluar la producció escrita, aquests tipus de respostes poc raonades evidencien o bé una manca de precisió a l'hora d'expressar-se o bé la tendència al llenguatge excessivament sintètic, que en molts casos és símptoma de dificultats en expressió escrita (L14).

Resposta 10

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La línica vermella

b. Com ho saps?

Per què al enunciat diu que al tub d'assaig l'aigua es calenta i el gerro es aigua a temperatura ambient

En aquest cas l'alumne argumenta la resposta fent referència a informació que extreu de l'enunciat. Sembla com si no li calgués la lectura del gràfic. Associa vermell a calent i blau a fred o ambient. No utilitza en els seus arguments aspectes d'informació extrets de la lectura del gràfic. No li calen segons el seu criteri. Cal fer notar que aquest alumne ha resolt la resta d'apartats d'aquesta activitat correctament; per tant, ha fet una bona lectura del gràfic.

Respostes incorrectes

Resposta 11

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La que representa la temperatura es la vermella

b. Com ho saps?

Perque no es pot calentar l'aigua a 70° i en 80 min.

Resposta 12

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La linia ~~blau~~ vermella.

b. Com ho saps?

Perque diu que està calenta i la temperatura ambient està entre 20° i 30° C

Resposta 13

1 **a.** Quina de les dues línies representa la temperatura de l'aigua del tub d'assaig?

La línia continua vermella

b. Com ho saps?

80

Per què comença als ~~[illegible]~~ 30 graus i acaba pujant a 80 graus.

En aquestes respostes, l'apartat *a* és correcte, però l'argumentació no es resol satisfactòriament.

En els casos 11 i 12, la lectura de l'enunciat i del gràfic no és correcta i, tot i que la línia vermella s'associa a calent i probablement es fa una lectura del gràfic parcialment correcta, no es pot argumentar.

En el cas 11, la resposta és absurda. En el cas 12 és probable que la resposta sigui una mala expressió d'un bon argument, ja que, si digués «*Perquè diu que és calenta i la temperatura de l'altra està entre 20 i 30 graus*», podríem considerar correcta la resposta.

En el cas 13, tot i que l'argument seria vàlid i parteix de la lectura del gràfic, s'ha invertit la lectura pel que fa al procés i això ha portat a un argument erroni i a una resposta absurda que indica que l'alumne no entén la situació global que se li planteja.

Apartat 4

4 Quines de les següents frases són veritables (**V**) i quines falses (**F**)?

	V	F
L'aigua calenta s'ha refredat més ràpidament al principi que al final.	☐	☐
L'aigua calenta s'ha refredat de forma similar durant tota l'estona.	☐	☐
L'aigua a temperatura ambient s'ha acabat escalfant molt.	☐	☐
A partir dels 7 minuts les dues aigües tindran la mateixa temperatura.	☐	☐

Respostes incorrectes

Resposta 1

4 Quines de les següents frases són veritables (**V**) i quines falses (**F**)?

	V	F
L'aigua calenta s'ha refredat més ràpidament al principi que al final.	☐	☒
L'aigua calenta s'ha refredat de forma similar durant tota l'estona.	☐	☒
L'aigua a temperatura ambient s'ha acabat escalfant molt.	☐	☒
A partir dels 7 minuts les dues aigües tindran la mateixa temperatura.	☒	☐

Resposta 2

4 Quines de les següents frases són veritables (**V**) i quines falses (**F**)?

	V	F
L'aigua calenta s'ha refredat més ràpidament al principi que al final.	☐	☒
L'aigua calenta s'ha refredat de forma similar durant tota l'estona.	☒	☐
L'aigua a temperatura ambient s'ha acabat escalfant molt.	☐	☒
A partir dels 7 minuts les dues aigües tindran la mateixa temperatura.	☒	☐

Resposta 3

4 Quines de les següents frases són veritables (**V**) i quines falses (**F**)?

	V	F
L'aigua calenta s'ha refredat més ràpidament al principi que al final.	☐	☒
L'aigua calenta s'ha refredat de forma similar durant tota l'estona.	☒	☐
L'aigua a temperatura ambient s'ha acabat escalfant molt.	☒	☐
A partir dels 7 minuts les dues aigües tindran la mateixa temperatura.	☒	☒ no

Resposta 4

4 Quines de les següents frases són veritables (**V**) i quines falses (**F**)?

	V	F
L'aigua calenta s'ha refredat més ràpidament al principi que al final.	☐	☒
L'aigua calenta s'ha refredat de forma similar durant tota l'estona.	☒	☐
L'aigua a temperatura ambient s'ha acabat escalfant molt.	☒	☐
A partir dels 7 minuts les dues aigües tindran la mateixa temperatura.	☒	☐

Les tres primeres afirmacions que planteja aquest apartat comporten entendre el procés i, per tant, poder comptabilitzar la variació de temperatura relacionada amb el temps transcorregut. L'última afirmació comporta una inferència, és a dir, elaborar una hipòtesi del que és raonable que passi. Com mostren els exemples, els alumnes tenen més dificultats per a interpretar el procés i fer-ne una lectura al gràfic. En canvi, són més capaços de fer la lectura puntual.

Resposta 1: L'alumne fa probablement una lectura ràpida perquè, tret de la primera, totes les altres respostes són correctes. De tota manera, el descens ràpid de la corba que marca la línia vermella no sembla indicar-li res per a evitar l'error.

Respostes 2 i 3: Les contradiccions en les respostes evidencien que l'alumne no pot fer una lectura del procés i les variacions. Encerta respostes (4.3 i/o 4.4) per casualitat.

Resposta 4: Tot i l'encert de l'ultima afirmació, l'alumne no entén el procés. L'encert és casual.

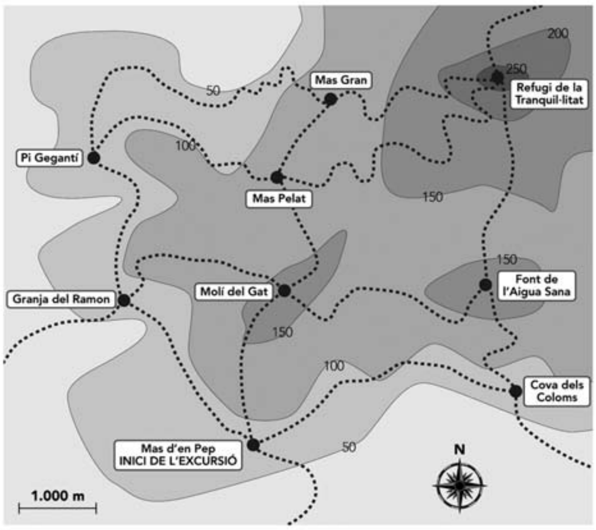
Aquesta activitat requereix també una bona lectura de les afirmacions i una bona comprensió. Aspectes lèxics com *molt, ràpidament, similar* tenen sentit si s'acota el seu significat quantitatiu amb la lectura del gràfic. Per tant, alguns errors poden també ser motivats per l'apreciació quantitativa del lèxic en relació amb la lectura acurada i significativa del gràfic.

Activitat 2: Excursió a la muntanya

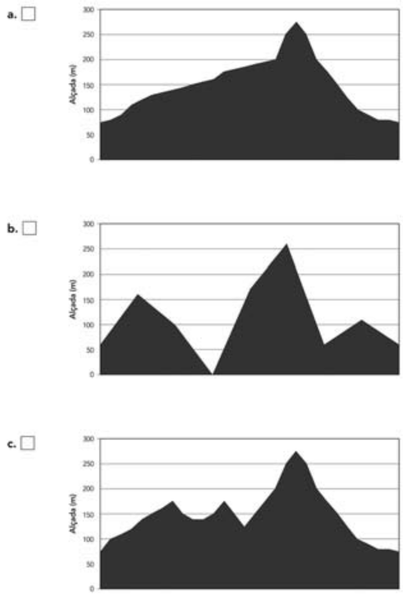
La interpretació del mapa i les informacions dels rètols i gràfics han de permetre treure informació de localització i orientació, també de planificació i previsió del recorregut, de càlcul i estimació de desnivells, de distàncies... Concretament en l'apartat 6, que és el que ens ocupa, l'alumne ha de combinar l'ús simultani de la interpretació provinent del mapa (dibuixos) i de la interpretació provinent dels gràfics (perfil del recorregut). La lectura del mapa en aquest cas implica una bona interpretació de les corbes de nivell.

EXCURSIÓ A LA MUNTANYA

L'Albert ha planificat, amb l'ajuda d'aquest mapa que mostra les corbes de nivell, una excursió per anar a dinar al Refugi de la Tranquil·litat. Sortirà del mas d'en Pep i ha decidit passar d'anada pel Molí del Gat i la Font de l'Aigua Sana i de tornada pel Pi Gegantí.

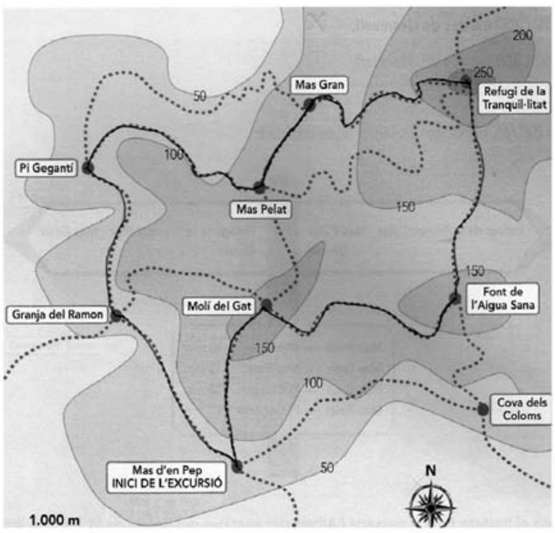


Quin perfil correspondria al recorregut que ha realitzat l'Albert?

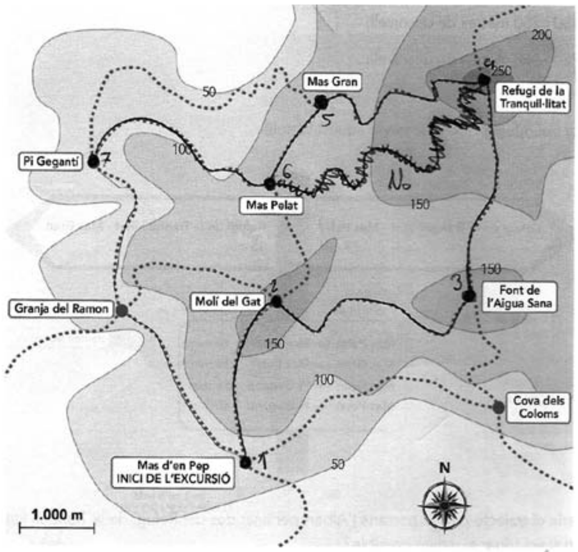


Recorreguts senyalats en el mapa

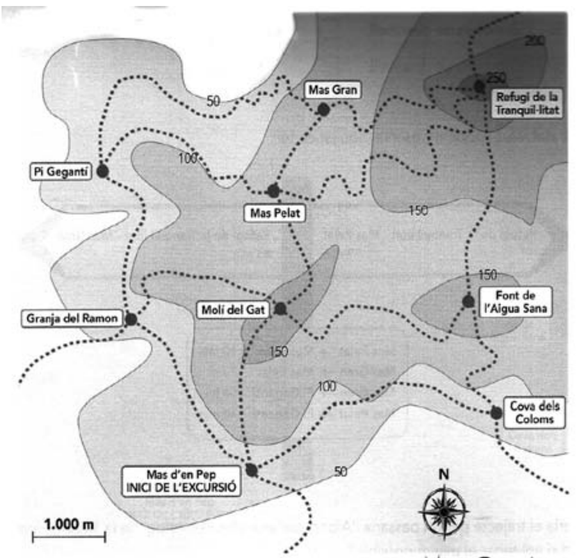
Recorregut 1



Recorregut 2



Recorregut 3



L'excursió de l'albert a començat a mas d'en Pep. des de qui
el Molí del Gat i de qui a la Font de l'Aigua Sana
fins al Refugi de la tranquil·litat.
Del refugi de la tranquil·litat ha passat per Mas Gran
fins el Pi Gegantí

Observant les estratègies que han seguit els alumnes, tant els qui han respost correctament com els qui han respost incorrectament, constatem que la majoria ha dibuixat el recorregut damunt el mapa com a fase prèvia per a resoldre l'activitat.

No tots els alumnes segueixen la recomanació de resseguir el recorregut que ha fet l'Albert sobre el plànol. Tot i que resseguir o no en el mapa el recorregut no determina que l'exercici es resolgui correctament o no, i així ho confirmen les respostes dels alumnes, pot resultar rellevant observar alguns aspectes que s'aprecien en els exemples seleccionats, ja que la resposta d'aquest exercici no indica el procés que ha seguit l'alumne.

S'observa que no tots els alumnes marquen el Mas d'en Pep com a inici i final de l'excursió. El recorregut assenyalat acaba, en alguns casos, en el Pi Gegantí.

En l'exemple 1, l'excursió acaba al lloc d'inici, i en el 2 i en el 3, al Pi Gegantí, segons han dibuixat en el mapa.

En l'exemple 2 s'aprecia com l'alumne ha anat marcant amb xifres correlatives cada un dels llocs per on ha passat l'Albert. Sota el mapa l'alumne ha dibuixat un possible perfil per comparar-lo amb els que se li mostren a la pàgina de la dreta.

En l'exemple 3, l'alumne, en lloc de dibuixar el recorregut, l'ha explicitat amb paraules sota el mapa. En aquest cas també l'acaba al Pi Gegantí.

En preguntar als alumnes per què han o no han marcat el recorregut en el mapa i per què acaben l'excursió al mateix lloc d'inici o per què només dibuixen el recorregut fins al Pi Gegantí, donen les respostes que tot seguit comentarem.

Alumne que no dibuixa l'itinerari (bon resolutor)

- *No vaig llegir que calia dibuixar l'itinerari. Ho vaig fer mentalment. Acabava de fer les preguntes anteriors i recordava per on passava. No era necessari.*

Alumnes que acaben l'itinerari al Pi Gegantí

- *L'excursió acaba al lloc on la va començar; però, com que el Pi Gegantí és l'últim que apareix en les preguntes, no l'he acabat de dibuixar.*
- La majoria opinen que l'excursió acaba al lloc d'inici. A més, alguns diuen que la pregunta 5 d'aquesta activitat ho fa suposar. De tota manera, n'hi ha algun que considera que no s'especifica el lloc on acaba l'excursió.

Determinació del perfil: respostes incorrectes

El nombre d'alumnes que responen **a** és més elevat que el nombre d'alumnes que responen **b**.

Resposta a

Hi ha alumnes que cometen una incorrecció en l'itinerari fruit de l'estimació incorrecta de la distància més curta per a anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Mas Pelat. En comptes de passar pel Mas Gran, hi van directament. De tota manera, aquest error no comportaria necessàriament respondre **a** en comptes de **c**, ja que l'última part de l'itinerari està representada de forma força similar en ambdós gràfics.

Una lectura poc acurada pot portar a aquesta resposta si no s'adonen dels desnivells de la primera part de l'itinerari. Però, entrevistats, alguns alumnes argumenten que:

—*Fins al Refugi de la Tranquil·litat sempre va cap amunt; no és fins després que baixa.*

Als alumnes que han respost **a**, se'ls ha demanat que expliquessin per què havien triat aquesta resposta i han dit:

—*Fins al Refugi de la Tranquil·litat va pujant.*

Alguns resseguien el recorregut en el mapa per fer notar que tiraven amunt; després deien:

—*I veus? Ara comença a baixar, i continua baixant fins al final.*

Per tant, l'error també és degut a la interpretació falsa del mapa en dir que anar cap a la part superior del mapa és pujar en alçada i anar cap a la part inferior és baixar des del punt de vista de l'alçada del recorregut. L'error rau a no adonar-se que el desnivell no prové de pujar o baixar en el mateix dibuix del mapa, sinó que el desnivell apareix quan es passa d'una corba de nivell a una altra, entenent que les corbes de nivell són les corbes que passen per punts del terreny situats a la mateixa alçada.

Se'ls ha preguntat què representaven els nombres que hi ha al mapa i els diversos tons de marró i han contestat:

- L'alçada
- L'alçada de la corba de nivell
- Cada color representa una altitud

Resposta b

Dels alumnes que responen **b**, la majoria no dibuixen l'itinerari sobre el mapa.

Tot i que el gràfic representa tres desnivells pronunciats que corresponen a tres elevacions destacades, en el mapa en cap cas no s'arriba al nivell del mar, cota zero.

Preguntats alumnes que han respost **b**, s'ha observat que cada una de les corbes que fa el recorregut (les corbes del camí) la interpreten que puja o baixa segons que la corba sigui convexa o còncava respecte a la part superior de la pàgina. I assenyalen la correspondència amb el perfil.

En preguntar-los sobre els símbols convencionals, es constata que els coneixen i saben què representen: els diferents colors, els indicadors d'alçada, els punts vermells com a llocs, la línia discontínua vermella com a camí.

En preguntar-los sobre com completarien la informació que falta a l'eix de les x en els gràfics, concreten:

Pel que fa a les unitats:

—*Les unitats han de ser km.*

Per a dividir l'eix, proposen solucions diferents:

—*A partir de l'escala calcularia els km del recorregut i després dividiria perquè quedés ben repartit.*

—*Amb un regle calcularia els km que hi ha entre cada un dels trams de l'itinerari i els situaria a l'eix de les x.*

—*Escriuria el nom del lloc i no posaria el nombre de quilòmetres; no sé com fer-ho.*

A l'alumne de la darrera resposta se li pregunta com sabria on posar cada nom i diu:

—*Mires el mapa i el número que hi ha prop del nom, mires on correspon al gràfic i ja ho tens. Per exemple: al mapa, Molí del Gat-150; vas al gràfic i mires el primer que està a 150: allà és el Molí del Gat al gràfic perquè és al principi de l'excursió. I així amb els altres.*

Generalitzant, tant els alumnes que responen **a** com els qui responen **b** no interpreten correctament les corbes de nivell sobre el mapa i/o no poden fer correspondre aquesta informació amb la que els proporciona el gràfic del perfil del recorregut. Això no vol dir que no disposin dels coneixements previs necessaris, més aviat no saben usar-los de manera comparativa.

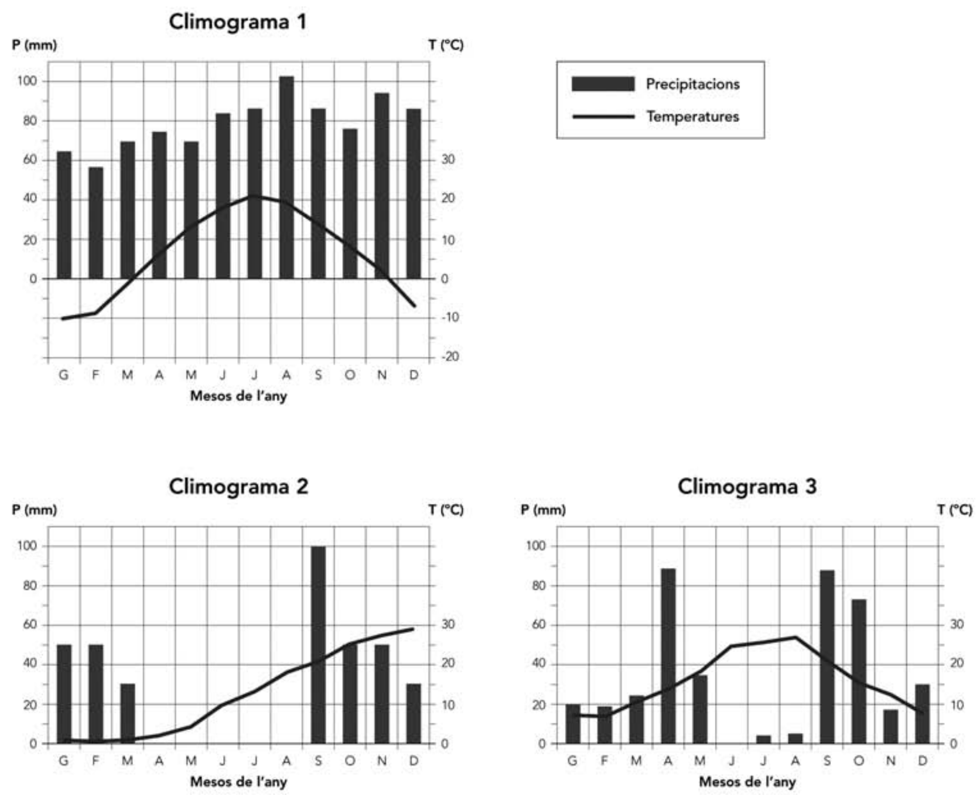
Activitat 13: Com és el teu país? El clima

Tota la informació requerida per a aquesta activitat ve donada per uns climogrames, és a dir, que es requereix la lectura i interpretació de diagrames de barres i gràfics de punts. Alhora cal que l'alumne utilitzi els coneixements previs sobre climes com a referent d'informació i s'adoni que els components de precipitacions i oscil·lació tèrmica ajuden a determinar els tipus de climes entre d'altres elements a tenir presents com la latitud.

COM ÉS EL TEU PAÍS? EL CLIMA

La Brigitte explica a en Marc que la seva ciutat, Mont-real (45° 28' de latitud nord), està situada més al nord que Terrassa (41° 30' de latitud nord), més lluny del mar i que el clima, per tant, és diferent.
La Brigitte envia tres climogrames a en Marc i li diu:

«Un dels tres climogrames correspon a la meva ciutat, l'altre és de la teva i el tercer és d'un lloc impossible perquè l'he retocat.»



1 D'acord amb els climogrames, respon si és veritable (**V**) o fals (**F**):

	V	F
La temperatura màxima del climograma 1 és menor que la del 3.	☐	☐
Al desembre, la temperatura del climograma 2 és de 29 °C.	☐	☐
El mes que plou més al climograma 1 és el de juliol.	☐	☐
El mes d'agost al climograma 3 no es registren pràcticament precipitacions.	☐	☐

Respostes incorrectes

Atesa la dificultat, en aquest tipus d'activitat, de descobrir sense ajuda de l'alumne resolutor quins han estat els motius que l'han portat a error, tots els comentaris són fruit d'entrevistes individuals amb els alumnes.

Per a triar els exemples, s'ha considerat oportú escollir aquells que presentaven error en l'afirmació que es volia comentar. S'han desestimat aquells que presentaven més de dos errors. (Els comentaris dels alumnes són en cursiva.)

Resposta 1

1 D'acord amb els climogrames, respon si és veritable (**V**) o fals (**F**):

	V	F
La temperatura màxima del climograma 1 és menor que la del 3.	X	X
Al desembre, la temperatura del climograma 2 és de 29 °C.	X	
El mes que plou més al climograma 1 és el de juliol.		X
El mes d'agost al climograma 3 no es registren pràcticament precipitacions.	X	

– Vaig fixar-me en les barres de precipitació en lloc de la línia vermella de les temperatures.

No utilitzen la llegenda com a referent. El color blau i/o vermell (convencions universals) no els serveix com a indicador d'ajuda.

Resposta 2

1 D'acord amb els climogrames, respon si és veritable (**V**) o fals (**F**):

	V	F
La temperatura màxima del climograma 1 és menor que la del 3.		X
Al desembre, la temperatura del climograma 2 és de 29 °C.		X
El mes que plou més al climograma 1 és el de juliol.		X
El mes d'agost al climograma 3 no es registren pràcticament precipitacions.	X	

– Vaig creure que la línia de les temperatures tocava el 30; ara veig que li'n falta una mica.

No fan una lectura atenta i precisa pel que fa a l'aproximació de valors numèrics.

Resposta 3

1 D'acord amb els climogrames, respon si és veritable (**V**) o fals (**F**):

	V	F
La temperatura màxima del climograma 1 és menor que la del 3.	X	
Al desembre, la temperatura del climograma 2 és de 29 °C.	X	
El mes que plou més al climograma 1 és el de juliol.	X	
El mes d'agost al climograma 3 no es registren pràcticament precipitacions.	X	

– *Vaig llegir la línia de les temperatures en lloc de les barres de precipitació.* (El mes de juliol és el mes amb la temperatura més alta.)

No utilitzen la llegenda com a referent. El color blau i/o vermell (convencions universals) no els serveix com a indicador d'ajuda.

Resposta 4

1 D'acord amb els climogrames, respon si és veritable (**V**) o fals (**F**):

	V	F
La temperatura màxima del climograma 1 és menor que la del 3.	X	
Al desembre, la temperatura del climograma 2 és de 29 °C.	X	
El mes que plou més al climograma 1 és el de juliol.		X
El mes d'agost al climograma 3 no es registren pràcticament precipitacions.		X

– *Vaig interpretar «no es registren pràcticament precipitacions» com que no hi ha precipitacions perquè diu que «no es registren». Si comparem l'agost amb els altres mesos, ha plogut molt poc i, com que diu «pràcticament», interpreto que no ha plogut.*

Els elements quantificadors indefinits no els ajuden a precisar, sinó que els entorpeixen la interpretació del gràfic. Una mala lectura de l'afirmació ha portat l'alumne a fer una lectura del gràfic no prou acurada i a caure en l'error.

Apartats 4 i 5

4 Indica quin climograma correspon a cada indret:

	Número de climograma
Terrassa	....
Mont-real (Canadà)	....
«Lloc impossible»	....

5 Explica com has decidit quin climograma correspon al lloc impossible.

....

....

....

Tenint en compte el tipus d'activitat i que tots dos apartats estan molt relacionats, s'ha fet una tria de respostes correctes i una altra amb els errors més rellevants i/o significatius. A fi d'esbrinar els motius que han portat els alumnes a l'error, s'han mantingut entrevistes individuals amb els alumnes. S'hi inclouen els comentaris fets pels alumnes.

(Apareixen en cursiva els comentaris dels alumnes a l'entrevista individual.)

Respostes correctes

	Número del climograma
Terrassa	3
Mont-real (Canadà)	1
«Lloc impossible»	2

Atesa la clau de correcció de l'apartat 5, hi ha respostes que, tot i no estar ben argumentades, es poden considerar correctes.

Les que segueixen són exemples d'arguments d'alumnes en entrevista individual que reflecteixen quins coneixements previs activen per a la resposta. No entrem en la consideració de si són o no arguments prou vàlids.

Resposta 1

a. *Com que Terrassa és a l'interior, les temperatures són més altes.*

b. *A Mont-real, com que fa més fred , plou més.*

c. *Lloc impossible: no pot estar 6 mesos sense ploure, mig hivern a temperatures altes i mig hivern a temperatures baixes.*

Resposta 2

a. Lloc impossible: al desembre 30ºC és molt irreal i que a l'abril no hi plogui...

Resposta 3

a. Terrassa: hi plou poc al mes d'agost, a Catalunya; hi fa calor i no hi ha precipitacions.

b. Mont-real: vaig mirar les precipitacions, que eren altes, i les temperatures, que eren baixes.

c. Impossible: 30ºC al desembre, 5 mesos sense ploure i hi plou molt al setembre després de 5 mesos sense ploure.

Resposta 4

5 Explica com has decidit quin climograma correspon al lloc impossible.

Ho edecidet perque aqui no estema -10°C a
liven i tonpoc plou tont durat tot lany i nons
pau nat els pimavera i em el tardo, es mpoire
que ls tepeaturs nons pusin i no vaicin i
es impesive que no plogui res durat 5 meses

L'alumne explica que primer llegeix el climograma 1 i la frase inicial respon al raonament que aquesta lectura li aporta, després continua el raonament fent una lectura del climograma 2. (Transcrivim entre cometes el que ha escrit l'alumne atesa la dificultat per a llegir-ho. L'alumne presenta una dislèxia greu.)

«Ho he decidit perquè aquí no estem a -10º C a l'hivern i tampoc plou tant durant tot l'any i només plou molt a la primavera i la tardor; és impossible que les temperatures només pugin i no baixin i és impossible que no plogui res durant 5 mesos.»

En el climograma número 2 fa una lectura visual de la línia de les temperatures, que no relaciona amb altres aspectes, i això el porta a afirmar que les temperatures només pugen i no baixen.

Respostes incorrectes

Tipologia A

	Número del climograma
Terrassa	3
Mont-real (Canadà)	2 **incorrecte**
«Lloc impossible»	1 **incorrecte**

Resposta A.1

4 Indica quin climograma correspon a cada indret:

	Número de climograma
Terrassa	3
Mont-real (Canadà)	2
«Lloc impossible»	1

5 Explica com has decidit quin climograma correspon al lloc impossible.

Perquè en un indret que arriba als -10 °C és impossible que hi pugui haver tanta precipitació.

Explicació de l'alumne: només va mirar el climograma 1 i va interpretar «precipitacions» solament com a líquides; no va comptar que podien ser sòlides en forma de neu.

Resposta A.2

4 Indica quin climograma correspon a cada indret:

	Número de climograma
Terrassa	3
Mont-real (Canadà)	2
«Lloc impossible»	1

5 Explica com has decidit quin climograma correspon al lloc impossible.

Es impossible que plogui tant tots els mesos amb les temperatures dels mesos d'estiu elevades.

Resposta A.3

4 Indica quin climograma correspon a cada indret:

	Número de climograma
Terrassa	3
Mont-real (Canadà)	2
«Lloc impossible»	1

5 Explica com has decidit quin climograma correspon al lloc impossible.

Terrassa → perque diu que hi ha 41° 30' de latitud nord.
Mont-real → perque diu que hi ha 45° 28' de latitud nord.
Lloc impossible → perque diu que el lloc es impossible pel clima.

En preguntar-li què vol dir i què ha fet, diu:

Terrassa i Mont-real

Ha mirat el climograma 2 (Mont-real) i la barra del setembre és més alta; per tant, 45° 28’ (ho diu en la informació inicial de l’exercici, és la latitud de Mont-real). Després mira Terrassa (climograma 3): la barra de l’abril i el setembre tenen menys altura que l’anterior; per tant, 41° 30’ (Terrassa).

«Lloc impossible»

Lloc impossible pel clima: «*No és possible que hi plogui tant. Al gener hi ha poca temperatura i poca pluja, al juliol hi ha molta temperatura i molta pluja, i això no pot ser.*»

Segons l’alumne la relació correcta ha de ser: POCA TEMPERATURA - MOLTA PLUJA; MOLTA TEMPERATURA - POCA PLUJA.

Resposta A.4

4 Indica quin climograma correspon a cada indret:

	Número de climograma
Terrassa	3
Mont-real (Canadà)	1
«Lloc impossible»	2

5 Explica com has decidit quin climograma correspon al lloc impossible.

Ho decidit que el 3 es el de Terrassa per que hi han poques precipitacions i la Temperatura puja quan anem a estiu Ho decidit que el 2 es imposible per que no si pot veure amb Temperatures Tant baixes: el 1 es el de Mont-real per que hi han precipitacions; les Temperatures no son gaire altes

Tipologia B

	Número del climograma	
Terrassa	2	**incorrecte**
Mont-real (Canadà)	1	
«Lloc impossible»	3	**incorrecte**

Resposta B.1

4 Indica quin climograma correspon a cada indret:

	Número de climograma
Terrassa	2
Mont-real (Canadà)	1
«Lloc impossible»	3

5 Explica com has decidit quin climograma correspon al lloc impossible.

El de Terrassa perque a Catalunya a l'hivern i a la tardor plou i en comui a l'estiu i la primavera no. Mont-real perque alla son moll aprop del Pol Nord i això fa que les temperatures siguin baixes.

Lloc imposible perque es imposible que les temperatures siguin tan altes.

En preguntar-li què vol dir, ens explica, tot assenyalant les barres de precipitació del 3, que «*les temperatures no poden ser tan altes*» (abril i setembre per sobre de 80 mm).

Algunes consideracions sobre l'anàlisi de resultats

De l'anàlisi de resultats, incloent-t'hi les converses amb els alumnes, es podrien fer algunes afirmacions.

A. Relació amb els coneixements previs

1. Pel que fa als canvis de temperatura

- Els colors vermell i blau associats a calor i fred respectivament com a convencionalisme establert no els ajuden; en canvi, per a altres és informació suficient per a respondre.
- Un punt en una línia d'un gràfic és un parell ordenat i representa dues magnituds relacionades entre elles.
- L'augment i/o la disminució (de la temperatura) impliquen el concepte de variació.

2. Pel que fa a la identificació de climes a partir de climogrames

- Els alumnes reconeixen el clima del propi país.
- Per a reconèixer els altres, fan servir els paràmetres del seu.
- Si hi ha paràmetres que tenen fixats com a únics possibles, no poden interpretar altres climes que fugin d'aquests paràmetres que ells han establert com a únics i que són erronis.
- Interpreten les estacions de l'any des de l'hemisferi propi.

B. Lectura de gràfics

- Són capaços, en general, de fer correctament la lectura de punts concrets en la línia d'un gràfic.
- Els costa fer la lectura correcta del procés i de les variacions en el decurs del temps.
- La posició i la forma de línia d'un gràfic no els aporten informació rellevant o bé no saben interpretar-la.
- La llegenda no s'utilitza com a referent.
- La precisió de llenguatge no els ajuda. Desestimen en lloc d'apreciar amb més exactitud.
- Presenten dificultats per a llegir els climogrames.
- En els climogrames confonen o no tenen clar que l'eix de la dreta i l'eix de l'esquerra no són el mateix i que les unitats s'organitzen de forma diferent i no són les mateixes.
- Falta precisió a l'hora de fer aproximacions de valors.

A més de les consideracions anteriors, hauríem d'afegir que la lectura atenta, acurada i comprensiva dels elements textuals influeix en l'elaboració de les respostes, i la producció escrita acurada, tot i que no és objecte que s'avaluï en aquesta activitat, mostra un procés de raonament ordenat necessari.

Algunes consideracions sobre el procés d'aprenentatge d'interpretació i construcció de gràfics

Al final del primer cicle de l'ESO els alumnes haurien de ser competents en la lectura, interpretació i construcció de gràfics, tant pel que fa als estadístics (bàsicament diagrames de barres i de sectors), com pel que fa als cartesians, que expressen relacions funcionals.

Pel que fa a la lectura, han de conèixer els elements d'un gràfic i la seva funció: el títol, la llegenda, els eixos, les unitats, els intervals, les línies de divisió, les barres, els punts, les línies que uneixen els punts...

Els alumnes han de ser capaços d'extreure informació d'un gràfic de manera puntual, lectura de punts, però a la vegada també han de ser capaços de fer-ne una lectura més global relacionant tota la informació que conté.

A més d'una primera informació explícita, cal que l'alumne pugui elaborar estratègies per a descobrir la informació implícita i sigui capaç d'utilitzar-la per a finalitats concretes.

En la interpretació de la informació implícita dels gràfics es començarà analitzant característiques qualitatives generals d'augment i disminució, intervals de creixement i de decreixement que progressivament caldrà anar quantificant. Es quantificaran els augments i les disminucions a partir de la lectura de punts i la seva comparació en una taula de valors, però també a partir de la lectura global de l'evolució del gràfic, i s'ha de poder parlar de velocitat de creixement i d'intervals numèrics de creixement i de decreixement.

A més, l'alumne ha de ser capaç de produir un text fruit de la lectura del gràfic, sia descriptiu d'un procés o bé explicatiu, en el qual intervinguin relacions de causa-efecte. Però a la vegada també és necessari que, a partir d'una descripció d'un gràfic, sigui capaç de reconèixer de quin gràfic es parla.

Atès que cada tipus d'informació requereix un tipus de gràfic, l'alumne ha de ser capaç de triar el tipus de gràfic més adient per als diversos tipus d'informació. Un cop l'alumne ha decidit el gràfic que li cal per a una aplicació concreta, ha de ser capaç d'organitzar-lo, d'assignar magnituds als eixos, decidir unitats, escalar els eixos i construir finalment el gràfic. A més, ha de realitzar una revisió final del procés de construcció vetllant per la coherència del producte final i comprovant si el gràfic reflecteix de manera clara tota la informació que s'havia proposat expressar en el tipus de gràfic que ha escollit.

A part de saber construir gràfics manualment, els alumnes hauran de saber utilitzar algun programa informàtic estàndard per a la confecció de gràfics.

Sobre la interpretació i la construcció de gràfics

El següent qüestionari permet al professorat:

- Analitzar les activitats que es porten a terme per a l'aprenentatge de la lectura, la interpretació i la construcció de gràfics.
- Reflexionar sobre la metodologia més adient per a treballar en el marc de l'aula amb aquesta finalitat.
- Prendre acords i decisions sobre la gestió docent per afavorir l'aprenentatge de la interpretació i la construcció de gràfics.

Es recomana que cada professor/a respongui aquest qüestionari individualment i que després, en una segona fase, es faci una posada en comú i es discuteixi en els departaments i en els equips docents a fi d'arribar a acords de millora.

		Molt sovint	Sovint	Alguna vegada	Gairebé mai
0	**En la meva assignatura treballem els gràfics en relació amb els temes següents:**				
	a) …				
	b) …				
	c) …				
	A classe es proposen la realització d'activitats i el foment d'actituds com:				
A	**Pel que fa a la lectura**				
1	Llegir i interpretar gràfics de tipus estadístic.				
2	Llegir i interpretar gràfics de tipus cartesià.				
3	Analitzar els elements d'un gràfic: títol, llegenda, eixos, intervals, unitats de mesura, etc.				
4	Llegir i/o interpretar valors que apareixen en el gràfic.				
5	Cercar dades per resoldre un problema o qüestió.				
B	**Pel que fa a la interpretació**				
6	Analitzar característiques qualitatives d'augment i disminució, intervals de creixement i decreixement.				
7	Quantificar augments i disminucions a partir de la lectura de punts i la comparació en una taula de valors.				
8	Analitzar l'evolució general del gràfic: velocitat de creixement, intervals numèrics de creixement i decreixement.				
9	Fer una lectura/interpretació visual a partir de l'alçada de les barres, de la posició dels punts i la línia que conformen...				
C	**Pel que fa a l'expressió de la informació**				
10	Seleccionar i ordenar la informació que ha de contenir en funció de la finalitat.				
11	Decidir si el text haurà de ser descriptiu o argumentatiu en funció del gràfic i/o de la finalitat.				
12	Expressar la informació extreta d'un gràfic mitjançant un text descriptiu o argumentatiu, segons el cas, amb correcció i coherència.				
D	Pel que fa a la construcció				
13	Discutir i decidir quin és el tipus de gràfic més oportú per a plasmar una informació concreta.				
14	Assignar les magnituds, decidir les unitats, escalar els eixos.				
15	Construir gràfics de tipus estadístic i de tipus cartesià.				

En qualsevol dels quatre aspectes A,B,C i D s'ha d'afavorir la interacció entre els alumnes. El treball en parelles i/o petit grup ho facilita.

En qualsevol activitat de lectura i interpretació, aspecte que no és restrictiu de les que ara abordem, la interacció entre els alumnes afavoreix l'aprenentatge. Qualsevol de les activitats mencionades en la taula pot realitzar-se de manera que l'afavoreixi. Per tant, és convenient que s'analitzi si es treballa per parelles o en petit grup per a afavorir la interacció entre els alumnes.

Una vegada estudiats els resultats de la graella, els departaments i els equips docents poden plantejar-se preguntes i arribar a acords sobre:

- quines de les propostes es treballen a les aules?
- com es treballen?
- fins a quin punt les diferents metodologies emprades per cada departament faciliten l'aprenentatge ?
- quines no es treballen prou?
- quines es consideren prioritàries?
- des de quines àrees es poden treballar?
- en quins aspectes es pot incidir més adequadament tenint presents les característiques específiques de cada una de les assignatures implicades?

Es recomana triar-ne algunes entre les que es considerin prioritàries, ordenar-les i planificar-ne l'aplicació. En la planificació cal incloure:

- com s'avaluaran? (quan, qui i com s'avaluaran).

Resolució de problemes

Introducció

La resolució de problemes, entesa com una competència, s'acostuma a definir com la capacitat que una persona té per a obtenir una solució a una situació que se li presenta, amb un propòsit (que pot ser de naturalesa molt diversa: prendre una decisió, realitzar una acció, obtenir un resultat, efectuar una argumentació, un disseny...), propòsit que no sap assolir de forma automàtica o immediata.

No hi ha dubte que el procés d'aprenentatge d'aquesta competència ultrapassa, més que qualsevol altre, l'àmbit escolar i, dins l'àmbit escolar, tampoc no es pot circumscriure a una àrea curricular concreta. És en el fons un eix transversal del mateix procés d'educació. Això no obstant, per les característiques d'alguns dels processos que s'hi poden relacionar, és una competència tradicionalment i encertadament lligada a les àrees de matemàtiques i ciències. També és veritat que a vegades aquesta relació amb aquestes àrees ha estat per a alguns alumnes més un obstacle que no una oportunitat d'aprenentatge, ja que ha reduït aquesta competència a un paper subsidiari d'alguns coneixements matemàtics, en lloc del paper invers.

És per aquest motiu que les tres activitats seleccionades en aquesta anàlisi són, d'entre totes aquelles que requerien la posada en marxa de la capacitat de resoldre problemes (les activitats 2, 6, 8, 9, 10, 15, 19 i 20), les que exigien uns coneixements matemàtics més elementals:

Activitat 2.4: En aquest apartat de l'activitat 2 es proposen diferents camins per a arribar a una mateixa destinació i s'ha d'escollir el més *ràpid*. Es tracta d'un problema en què la comprensió de la situació i la interpretació de la informació no són immediates, ja que la *primera intuïció* i el fet d'entendre l'activitat com una proposta de «reconeixement–resposta» poden jugar-hi en contra; cal identificar possibilitats i explorar-les mitjançant càlculs molt elementals.

Activitat 10.2: En aquest apartat, en el context de posar marc a una fotografia, s'integra la necessitat del càlcul d'un perímetre. Tanmateix, es tracta d'un problema que requereix l'adequada integració de dos tipus d'informació molt diferents: verbal (dimensions, gruix) i visual (forma que es dóna al marc). En aquesta activitat també poden jugar en contra de l'alumnat diferents procediments estàndard utilitzats de forma cega.

Activitat 20: Es tracta d'un pas endavant en relació amb l'activitat 19 (no considerada en aquesta anàlisi) en tant que es planteja en el marc del treball en grup. En aquesta activitat es requereixen processos generals com els que vénen definits per la conjecturació–particularització–generalització, paral·lelament a un cert domini en el treball sistemàtic, en l'argumentació, en la contrastació (versus l'assaig-error o l'empirisme cec), en la claredat d'explicacions i en l'ús d'un llenguatge mínimament acurat.

Amb relació a l'argumentació que es demana en cada cas, aquest factor forma part essencial de l'activitat de resolució de problemes, en quant és l'explicitació clara que, efectivament, s'ha fet el pas de l'empirisme a l'anticipació. Tanmateix, el nivell d'argumentació pot ser molt divers. Malgrat que una primera impressió pugui indicar el contrari, no es requereixen coneixements de probabilitat més enllà dels elementals lligats al significat del terme mateix.

S'han seleccionat algunes respostes reals d'alumnat, representatives tant de solucions riques i que poden servir de model, com representatives d'errors o bloquejos. Els comentaris d'aquestes resolucions posen l'èmfasi en els aspectes vinculats amb el procés d'aprenentatge de l'alumnat i es relacionen amb les observacions que sobre aquest procés tanquen l'apartat.

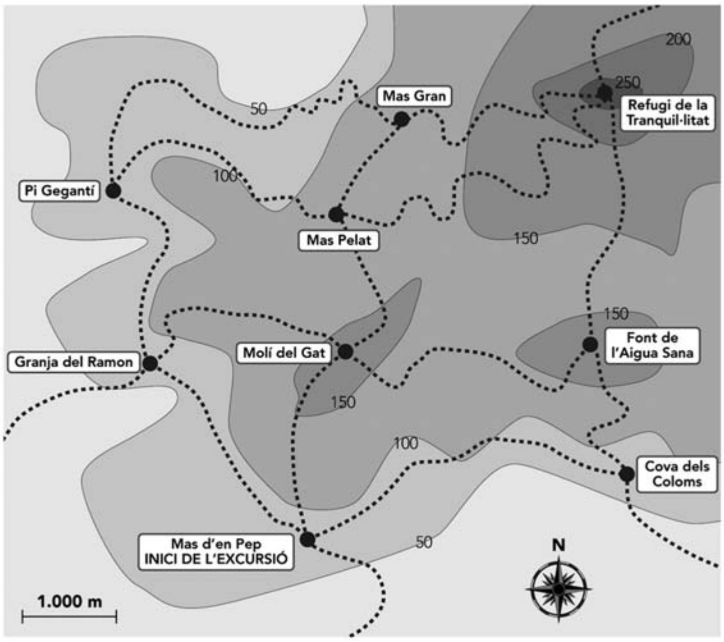
En tota anàlisi d'un procés de resolució d'un problema, el document base és el registre deixat pel resolutor, el full de resolució. S'és conscient que el format de les proves Cb14, per diferents motius de funcionalitat d'aplicació, de rapidesa de correcció, d'aplicació generalitzada, etc., encertats o no, no convida a una explicitació d'aquest procés. Per tant, l'anàlisi se centra inevitablement, en efecte, en alguns bons exemples de full de resolució, però en molts altres es basa en indicis, en inferències més o menys plausibles d'allò que cal pensar que ha fet o ha deixat de fer el resolutor.

Aquesta limitació es fa més palesa precisament en aquella prova en la qual el treball de resolució de problemes és més ric i més propi: en la prova de grup (l'activitat 20); sovint no queda cap registre de les discussions del grup, de les exploracions, dels acords i desacords... Tanmateix, també és cert que es disposa d'una eina única per a l'anàlisi de l'activitat de resolució de problemes en tota la seva complexitat: el full d'observacions (pautades i lliures) del professorat; aquesta eina ha esdevingut cabdal per a donar explicació a molts dels errors i bloquejos produïts.

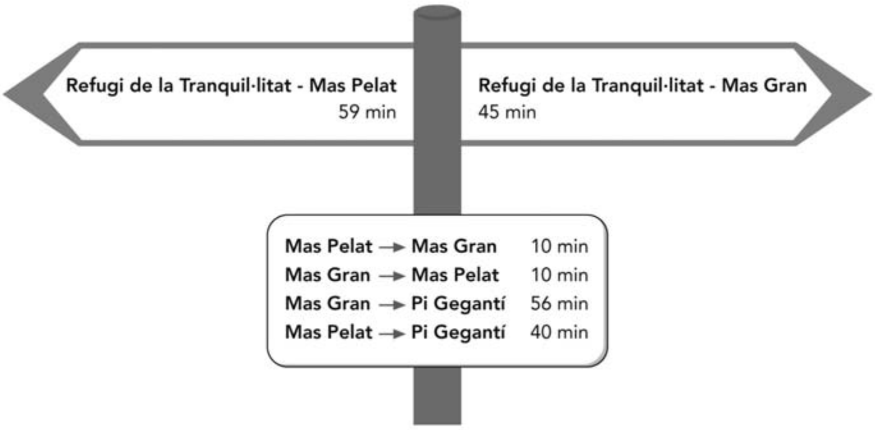
Activitat 2.4

EXCURSIÓ A LA MUNTANYA

L'Albert ha planificat, amb l'ajuda d'aquest mapa que mostra les corbes de nivell, una excursió per anar a dinar al Refugi de la Tranquil·litat. Sortirà del mas d'en Pep i ha decidit passar d'anada pel Molí del Gat i la Font de l'Aigua Sana i de tornada pel Pi Gegantí.



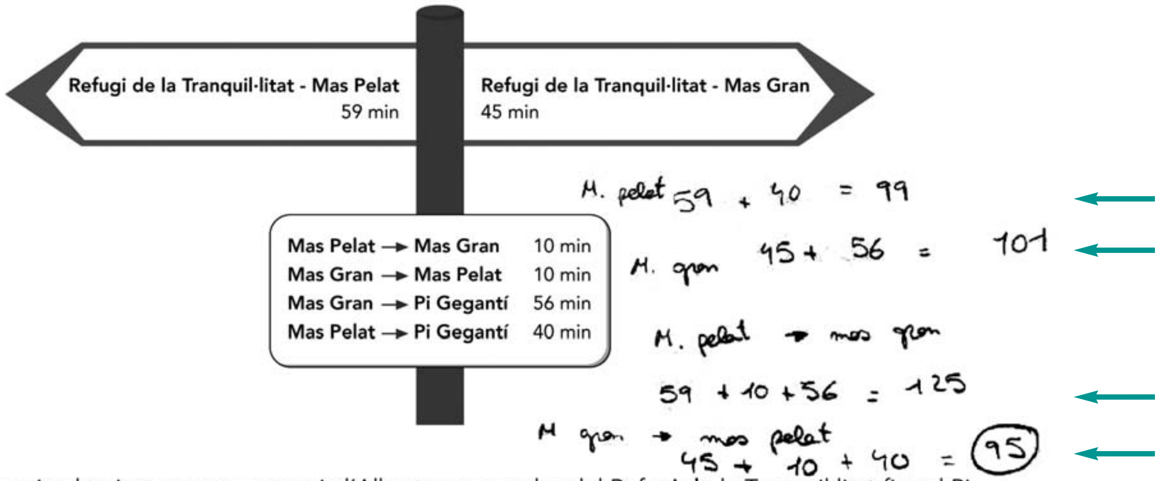
4 En sortir del refugi podem observar aquest cartell:



Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Els **paràmetres** utilitzats per a l'anàlisi d'aquesta activitat han estat els següents: la comprensió de la situació i del propòsit plantejats, la interpretació de la informació (en els seus dos formats: verbal d'una banda i plànol–rètol de l'altra), la representació del problema —o sigui l'estratègia desenvolupada— i la comunicació de la solució.

Resposta 1



Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Del refugi de la tranquilitat al mas gran, del mas gran al mas pelat i del mas pelat al pi geganti (95 min)

Aquesta alumna mostra una adequada comprensió de la situació plantejada i una correcta interpretació de la informació. Les seves anotacions ens permeten observar que l'estratègia utilitzada ha estat la d'identificar els quatre possibles itineraris (obviant aquells que «fan recorreguts innecessaris») i analitzar la durada en cadascun. Finalment, la comunicació que fa de la solució és simple però absolutament clara i suficient, afegint-hi una dada que no es demanava: la durada del recorregut.

Resposta 2

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Del refugi de la tranquilitat fins al Mas Gran, i d'allà, fins al Mas Pelat i seguidament, cap al Pi gegantí, en total 45min + 10min + 40min = 95 minuts.

L'única diferència d'aquesta resposta amb la de l'anterior alumna és que el procés d'identificació dels recorreguts possibles i la corresponent anàlisi per tal de trobar l'òptim aquí no es mostren, per la qual cosa no es pot concloure que s'hagi fet de forma completa (les quatre possibilitats). Tanmateix, no oblidem que la selecció d'aquest recorregut òptim no és evident, ni per les dades del plànol (que podrien induir a donar una altra resposta, tot confonent *durada* amb *distància*), ni per les dades dels rètols (que requereixen una certa reflexió).

Resposta 3

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Des del Refugi de la tranquilitat al Mas Gran, des del Mas Gran, al Mas Pelat, i del Mas Pelat al Pi Gegantí (total 105 min).

Una diferència més per afegir als comentaris de la resposta anterior: un error de càlcul. No obstant això, aquest error fa sospitar que l'anàlisi de possibilitats o no s'ha fet o ha estat incompleta, ja que, si s'hagués fet, s'hauria observat un recorregut de menys durada (Refugi – Mas Pelat – Pi, 99 minuts).

Resposta 4

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Mas gran → Mas pelat!

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Tendria que passar pel mas pelat

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Mas pelat → Mas Gran 10 min

Aquí s'observa una tipologia de solucions molt freqüent a classe: únicament un resultat o la resposta estricta a la pregunta formulada.

L'absència gairebé total d'anotacions, d'explicacions i fins i tot de comunicació de la solució no permet analitzar la correcció de la resolució. D'una banda, podria donar-se el cas que (vegeu els dos primers exemples), a causa de la no excessiva dificultat del problema, es tractés d'una resolució ben desenvolupada mentalment (procés i càlcul), amb una correcta comprensió de l'enunciat i interpretació de la informació i una molt deficient manera de comunicar la solució. Però, d'altra banda, es podria tractar també d'un exemple de molt mala comprensió del propòsit de la situació plantejada, havent-se donat com a resposta aquella part del recorregut en la qual es triga menys temps (en el primer i tercer dels exemples, 10 minuts) o una obvietat (en el segon dels exemples).

En aquesta darrera possibilitat, s'hauria d'associar a aquests processos de resolució probablement una creença relativament freqüent entre l'alumnat, en el sentit que una «pregunta» que no «inclou estrictament referències a càlculs» no s'associa a un problema «de matemàtiques» i, per tant, s'hi pot donar una «resposta ràpida» basant-se en els referents que sí que puguin estar inclosos en l'enunciat i sobretot en experiències, referents o intuïcions personals.

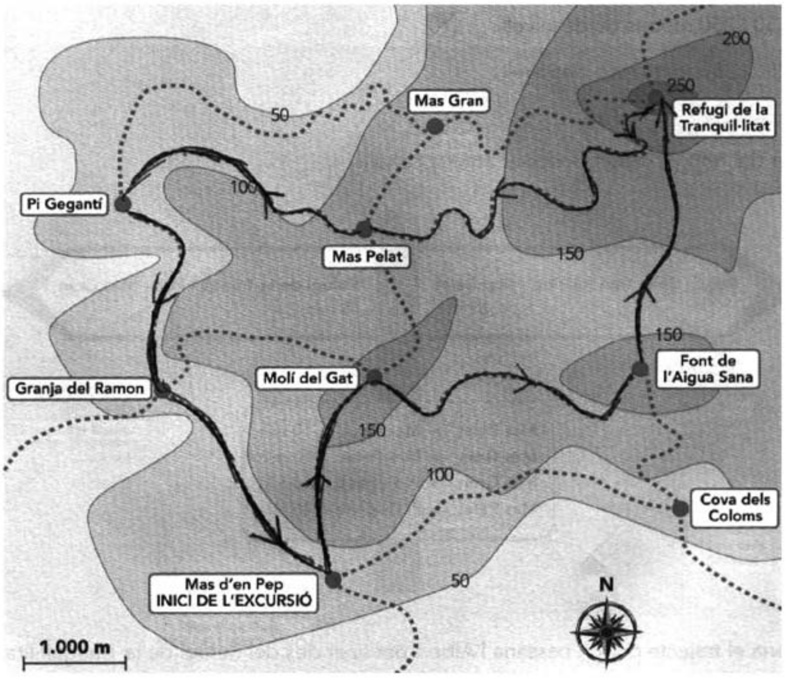
Resposta 5

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Refugi de la tranquil·litat, mas gran, pi gegant.

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Agafaria el camí que passa pel Mas Pelat.



Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Anar cap al ~~Mas gran~~, que són [illegible] min, i anar ~~cap~~ del Mas Pelat al Pi gegantí que són 40 min i la suma dels dos trajectes és 99 min; en canvi passar pel ~~el~~ Mas Gran ens faria estar 101 min.

En totes tres respostes (la segona, acompanyada del recorregut marcat en el plànol), es pot intuir el mateix error: una mala comprensió de la situació plantejada o del propòsit demanat, tot confonent *durada mínima* amb *via directa*. Aquest error s'observa per l'explicitació del tercer exemple, en què la identificació i posterior anàlisi de possibilitats que fan es redueix a les dues més bàsiques, d'entre les quals s'ha escollit l'òptima.

El que no és clar ni homogeni és l'explicació de l'error: en alguns casos, pot haver estat degut, efectivament, a una interpretació incorrecta (o excessivament ingènua) de la informació, malgrat que el procés seguit a continuació és prou correcte; en altres pot ser degut a fenòmens com els associats a la creença que s'esmentava en el paràgraf anterior: resposta ràpida a una qüestió que «no és un problema de matemàtiques».

Resposta 6

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Refugi de la Tranquil·litat - Mas Gran - Pi Gegantí = 56 min

La mateixa anotació fa pensar en una incorrecta interpretació de les dades facilitades.

Resposta 7

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Passar de Refugi a Mas pelat i de Mas Pelat a Pi Gegantí (50 minuts)

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Primer aniria del Refugi de la tranquilitat al Mas Pelat (10min) i del mas pelat al pi gegantí (40min). I tardaria uns 50 minuts.

En el primer dels exemples, hi ha potser una mala interpretació de les dades de l'enunciat (confusió del trajecte Refugi – Mas Pelat amb el trajecte Mas Gran – Mas Pelat?). O es tracta tal vegada d'un error en els càlculs? En el segon dels exemples és evident que es tracta de la primera opció. En qualsevol cas, si s'hagués efectuat de forma sistemàtica l'anàlisi de possibilitats, aquestes errades haurien estat probablement identificades i resoltes pels alumnes mateixos.

Resposta 8

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

Passa pel mas pelat perque es mes curt tardara 40 min

Les anotacions fan pensar en una mala interpretació de la pregunta formulada (pot haver entès «des d'on trigarà menys a arribar al Pi»?). Òbviament aquesta errada es pot associar a mecanismes o habilitats no prou ben assolits que portin a una incorrecta comprensió de situacions.

Resposta 9

Quin seria el trajecte per on passaria l'Albert per anar des del Refugi de la Tranquil·litat fins al Pi Gegantí si vol trigar el mínim possible?

de ha seguir del molí del gat, despres font de l'aigua Sana.

La desconcertant resposta ens pot fer pensar tant en una absoluta manca de comprensió de la situació plantejada com en una resposta aleatòria donada només amb la finalitat de contestar a una pregunta que probablement no s'associa a un «problema de matemàtiques».

Activitat 10.2

2 La Brigitte també ha enviat una foto a en Marc, que ha decidit emmarcar-la.
La foto fa **13 cm x 18 cm** i vol emmarcar-la amb un llistó de fusta d'1 cm d'amplada al voltant de tota la fotografia, tal com mostra la imatge següent.

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

....

Els **paràmetres** utilitzats per a l'anàlisi d'aquesta activitat han estat els següents: la comprensió de la situació i del propòsit plantejats, la interpretació de la informació (en els seus dos formats: verbal d'una banda i visual de l'altra), la representació del problema —o sigui l'estratègia desenvolupada— i la comunicació de la solució.

Resposta 1

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

$2(18+2)+13\cdot 2 = 2\cdot 20+26 = 40+26 = 66$ R: 66 cm de llistó

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

$13 \times 2 + 18 \times 2 + 4 =$

$26 + 36 + 4 = 66$ cm

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

2 trossos de 13 cm llarg i 2 trossos de 20 cm llarg. necessita un llistó de 66 cm de llarg

Tots tres alumnes mostren una adequada comprensió de la situació plantejada i una adequada interpretació de la informació (visual i verbal); les seves anotacions ens permeten observar que l'estratègia utilitzada ha estat la de determinar la llargada de cadascun dels llistons i sumar-les, tot i que les formes de representació han estat significativament diferents en els tres casos. Finalment, la comunicació que fan de la solució i del procés de resolució és simple però clara i suficient.

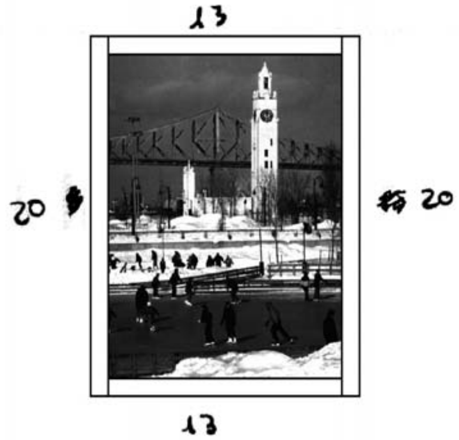
Resposta 2

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

2 de 13 cm i 2 de 20

Malgrat que en aquest exemple no s'explicita el resultat final com a resposta estricta a la pregunta formulada, pel seu context i per la naturalesa de les operacions implicades, això tampoc no es pot considerar una mancança greu, ja que, d'alguna manera, s'ha assolit el propòsit sol·licitat. En la resta d'aspectes, malgrat l'absència de qualsevol altra anotació, ens podem remetre a la majoria d'observacions del paràgraf anterior.

Resposta 3



En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

$40 + 26 = 66\ \text{cm} \times 1\ \text{cm}$

D'una banda, l'alumne utilitza també suport visual per a expressar el procés seguit (simple, com els anteriors) i redueix les expressions aritmètiques al mínim. Tanmateix, en expressar la solució, probablement un excés de zel o de ganes de rigor (indicar totes les dimensions del llistó, entès com un rectangle) el porta a una igualtat de dubtós rigor aritmètic.

Resposta 4

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

$13 \times 2 = 26$ / $18 + 1 = 19$ / $19 \times 2 = 38$ / $26 + 38 = 64$ cm de llarg × 1 d'ample.

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

Necessita 70 cm de llistó.

$18 + 2 = 20 \times 2 = 40$

$13 + 2 = 15 \times 2 = 30$

$+$ 70

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

18+18 + 12+12 = 60 cm. R: 60 cm de llarg

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

18 + 18 + 11 + 11 = 58 cm.

Tots quatre exemples coincideixen en una tipologia comuna d'error. Probablement tots quatre han comprès perfectament la situació plantejada i el propòsit demanat; però tots han comès un error en la interpretació combinada de la informació verbal i visual: si bé entenen que les dimensions donades verbalment havien de ser modificades en funció del que indicava la imatge, en el primer exemple s'interpreta que només «sobresurten 1 cm» (per dalt), en el segon s'interpreta que són els dos llistons els que cal sobredimensionar, en el tercer curiosament s'interpreta que «no és pas que al llistó llarg calgui donar-li encara més llargada, sinó que cal escurçar el curt» i finalment en el quart el mateix alumne ens evidencia amb les seves anotacions que no ha interpretat adequadament les dimensions. En la resta de processos (explicitació del procés i comunicació de la solució), tots quatre poden ser considerats acceptables.

Tampoc no es pot descartar la possibilitat que el quart exemple respongui a una interpretació que, malgrat que sigui poc habitual, en cap cas no podria ser considerada incorrecta: el marc se superposa a la part més «exterior» de la foto, no «afegint» ni llargada ni amplada a les seves dimensions, sinó precisament reduint-ne la visibilitat. En aquest supòsit, el procés de resolució seria perfectament admissible.

Resposta 5

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

$13 \cdot 2 + 18 \cdot 2 = 26 + 36 = 62$ cm   Necessitava 62 cm

Probablement l'error d'aquesta alumna és d'una tipologia molt diferent dels anteriors: no es tracta tant d'un error en la interpretació de les dades, sinó del fet d'obviar una part de la informació que té una naturalesa més qualitativa (la forma del marc, les seves característiques), quedant-se només amb la part estrictament quantitativa; potser és fruit d'una «rutinització» del procés de resolució, en tant que s'aborda la situació identificant, d'una banda, dades quantitatives en el problema i, d'altra banda, paraules o termes que indiquin «l'operació adequada».

Resposta 6

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

15×20

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

234 cm^2

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

26 cm x 36 cm = 62 cm en total

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

468 cm de llistó

No hi ha dubte que el format en el qual es presenta la informació d'un problema condiciona sovint algun dels processos implicats en la resolució; i de vegades pot arribar a suposar un obstacle en alguns alumnes. Aquests quatre exemples de respostes tenen en comú la supravaloració del format en el qual s'han donat les dimensions de la fotografia (13 cm x 18 cm), i fins i tot en el segon cas s'ha donat com a resposta una magnitud (superfície) directament associada a l'operació de multiplicació, però sense cap relació amb el que es demanava. No cal dir que el procés de reflexió, que és d'esperar en qualsevol resolució d'un problema, en aquest cas ha estat absent, per elemental que pogués ser o per evident que es pogués trobar en comparació amb l'enunciat.

Resposta 7

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

Necesita quatre llistons de 58'5cm cada un 13x18=234:4=58'5cm

Es tracta d'un exemple de resposta que, a banda de l'interès que pugui tenir en la seva anàlisi des de l'àmbit d'*espai i forma* o des del de *magnituds*, des de la perspectiva de la resolució de problemes es podria analitzar posant l'èmfasi en els aspectes actitudinals o de creences que s'hi poden associar; en particular podríem associar-hi la creença: «*Provem d'aplicar alguns procediments que habitualment funcionen o que recentment s'han treballat a classe*». És important remarcar l'absència de qualsevol control o reflexió de l'alumna en relació amb la solució donada.

Resposta 8

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

25 cm de llistó.

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

Necessitarà 0, 25 cm de llistó

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

10,5cm : 15,5 cm

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

3cm de ellistó

En Marc compra un llistó d'1 cm d'amplada que després talla en quatre trossos per fer el marc.
Quants cm de llistó necessita per a fer un marc de la forma que indica la imatge?

31 llistons

L'absència d'operacions, l'absurditat dels resultats, la «resposta ràpida» sense buscar un «suport matemàtic»... Es tracta de cinc exemples de respostes que probablement també caldrà emmarcar en una anàlisi des de la perspectiva actitudinal o de creences que s'hi poden associar.

Activitat 20.3

A PARTIR DE LES TAULES DE RECOMPTES QUE HEU FET CADASCÚ, DISCUTIU EN GRUP I RESPONEU

1 Responeu per a cada cas:

	Quins són els resultats que no han sortit mai?	Doneu algun motiu, argumenteu-ho
Suma		
Resta		
Multiplicació		
Nombre més gran		

3 En quin dels quatre casos (suma / resta / multiplicació / major) creieu que és més probable que «surti parell»?

....

....

....

Per què?

....

....

....

Els **paràmetres** utilitzats per a l'anàlisi d'aquesta activitat han estat els següents: la comprensió de la situació i del propòsit plantejats (explícit i implícit), a partir dels indicis del full de resolució i de les observacions del professorat; la representació del problema —o sigui la col·lecció d'estratègies desenvolupades—, a partir del full de resolució; les solucions aportades (en contingut i explicació); les argumentacions donades (naturalesa, claredat, codificació...); la interacció alumne–alumne i alumne– feina, en tots els seus vessants, a partir dels diferents indicadors observats pel professorat.

Resposta 1

2 Responeu per a cada cas:

	Quins són els resultats que surten «més sovint»?	Doneu algun motiu, argumenteu-ho
Suma	7 - 6 - 8	Perquè en restre del 1 al 6, 1+6=7 2+5=7 3+4=7 i per el sis 1+5 2+4 3+3 i per el vuit 2+6, 3+5, 4+4
Resta	1 - 0	0 = 6-6, 5-5, 4-4, 3-3, 2-2, 1-1 1 = 5-4, 6-5, 4-3, 3-2, 2-1, 1-0.
Multiplicació	12	12 = 2·6 i 4·3
Nombre més gran	5, 2 i 6	El 2 es una casualitat El 6 es el mes gran i el 5 el segon mes gran

3 En quin dels quatre casos (suma / resta / multiplicació / major) creieu que és més probable que «surti parell»?

Multiplicació perquè hi ha mes possibilitats de q surti parell per p·p=p i·p=p p·i=p i·i=p

Malgrat que les respostes evidencien que la situació plantejada ha estat compresa pel grup, el full d'observacions del professorat indica que es va trigar perquè això fos així, principalment per la relaxació general del grup.

L'àmbit al qual s'ha portat la representació del problema, o sigui la selecció d'estratègies a utilitzar, és el de l'anàlisi de possibilitats o recomptes, excloent de forma clara l'empirisme, com s'observa en un comentari del segon apartat, en relació amb el fet que el 2 hagi estat un resultat freqüent: «*el 2 és una casualitat*». En les respostes del segon apartat s'observa com aquesta anàlisi de possibilitats és explícita, però no és completa, ja que no distingeix entre els dos daus.

La solució (resposta) al problema (tercer apartat) és admissible i matemàticament correcta. Els motius aportats poden ser considerats realment una argumentació convincent, malgrat que contenen un error (i · i = p) fruit d'un lapsus d'escriptura (contrastat posteriorment, relacionat amb el típic - · - = +, i com en certa manera s'intueix en el conjunt de les anotacions). No obstant això, la voluntat mateixa del grup de ser «formals i rigorosos» (utilitzen un sistema de codificació molt senzill, però molt clar malgrat l'error) els porta a ser molt breus i sintètics en general en les seves explicacions: donen més valor a la precisió que a la claredat.

Amb relació a la interacció alumne–alumne, de les observacions del professorat i de les valoracions del grup mateix es dedueix que hi ha: un membre que aporta creativitat, ganes i gust pel repte, però que no respecta les intervencions alienes; uns altres dos membres que aporten ganes i moltes idees (no sempre les millors), però que veuen que no sempre són escoltats per aquell que consideren en certa manera el líder del grup; un quart membre que no fa aportacions i la implicació del qual és molt baixa. El treball previ individual de cada membre es correlaciona amb aquestes apreciacions. En general, el grup ha trigat a «posar-se en marxa» i, quan ho ha fet, ho ha assumit com un repte i una mena de «concurs», ja que ha donat per acabada molt ràpidament la feina. Aquí es trobaria l'explicació a la sensació de «molt bona feina» però inacabada que respira el full de resolució.

Resposta 2

	Quins són els resultats que surten «més sovint»?	Doneu algun motiu, argumenteu-ho
Suma	7, 8, 6, 4.	Perquè són els números més freqüents que surten
Resta	1, 2, 3.	Perquè són els números més freqüents que surten
Multiplicació	5, 10, 4, 12	Tot i que està igualat, són els números que han sortit més
Nombre més gran	3, 4, 5, 6.	Perquè són els números que han sortit més.

3 En quin dels quatre casos (suma / resta / multiplicació / major) creieu que és més probable que «surti parell»?

multiplicació

Per què?
Perquè només sortirà un nombre senar, quan els dos nombres siguin senars.

La situació plantejada ha estat compresa ràpidament (ho confirma el full d'observacions del professorat), però no pas el seu «propòsit no explícit» (la reflexió per a l'anticipació), que només ha estat entès en la part final de l'activitat, que incloïa el terme *probable*.

És per això que l'àmbit al qual s'ha portat la representació del problema, o sigui la selecció d'estratègies a utilitzar, és molt pobre: una barreja d'empirisme i anàlisi «a partir del sentit comú». Aquest empirisme s'observa clarament en les argumentacions de l'apartat segon: les respostes són redundants, no aporten res i estan centrades en el que «s'ha observat», en el que «ha sortit», lluny de l'anàlisi molt més rigorosa que sí s'ha produït en l'apartat primer (que aquí no s'adjunta). Tanmateix, la resposta i l'argumentació de l'apartat tercer fan pensar en una anàlisi reflexiva. En cap cas no s'observen indicis d'una anàlisi sistemàtica de possibilitats.

Com s'ha dit, la solució al problema (tercer apartat) és admissible i matemàticament correcta. Els motius aportats poden ser considerats realment una argumentació convincent i suposen un punt d'inflexió en relació amb l'apartat segon.

Quant a la interacció alumne–alumne, de les observacions del professorat i de les valoracions del grup mateix es dedueix que: hi ha un grup on han interactuat prou bé tres dels seus membres, amb un mateix nivell d'implicació, d'aportació d'idees i de bon treball; hi ha, però, un quart membre que no fa aportacions perquè veu que el seu nivell de coneixements i creativitat és lluny del dels seus companys i, malgrat les invitacions dels altres tres, opta per mantenir-se correctament al marge. El treball previ individual de cada membre es correlaciona amb aquestes apreciacions, excepte la gran ajuda que ha tingut aquest quart membre de part de la resta. En general, podria tractar-se d'un exemple de treball en grup en què la suma de les aportacions individuals ha donat un important «valor afegit» al producte; no es pot descartar que una estona més de treball i alguna indicació del professorat els hauria pogut fer reconsiderar les argumentacions donades en l'apartat segon.

Resposta 3

	Quins són els resultats que surten «més sovint»?	Doneu algun motiu, argumenteu-ho
Suma	6, 7. ✓	6 és el número més gran del dau, llavors, els números sumats sempre serian més grans de 6.
Resta	6, 2, 1. ✓	Els números sempre seràn inferiors a 6
Multiplicació	~~8, 30~~ 4	Poden sortir multiplicacions de l'1 al 36, amb les multiplicacions surten els números més grans.
Nombre més gran		

3 En quin dels quatre casos (suma / resta / multiplicació / major) creieu que és més probable que «surti parell»?

En les multiplicacións.

Per què?

Es més probable que surti un parell i un imparell que 2 imparells, i imparell i parell fan parell
3x6=18 /4x5=20

La situació plantejada ha estat compresa ràpidament, com s'indica en el full d'observacions del professorat i s'intueix en la naturalesa de les respostes donades.

Malgrat tot, la representació del problema s'ha quedat en un àmbit de reflexió asistemàtica i bastant ingènua, que en general només utilitza les matemàtiques com a context. És aquesta mala representació del problema que els porta a una excessiva dependència inconscient de l'empirisme i a arguments absolutament inadequats. Tanmateix, la resposta i l'argumentació de l'apartat tercer fan pensar en una anàlisi molt més reflexiva, però que queda lluny d'una anàlisi sistemàtica de possibilitats.

Com s'ha dit, la solució al problema (tercer apartat) és admissible i estrictament correcta. Els motius aportats poden ser considerats de forma estricta com una argumentació convincent, tot i que el baix nivell d'explicació i explicitació podria fer pensar també que es tracta d'una línia de reflexió no del tot correcta que ha quedat inacabada.

Quant a la interacció alumne–alumne, de les observacions del professorat i de les valoracions del grup mateix es dedueix que es tracta d'un grup de tres membres en què hi ha hagut un nivell d'implicació, unes ganes de treballar, un treball individual previ i un respecte mutu molt alts; però es tracta d'una col·laboració entesa en el sentit que la feina del grup era estrictament la suma de les tres feines, no hi ha hagut «valor afegit»; per tant, des d'aquesta perspectiva, la interacció ha estat molt baixa, la qual cosa ha tingut la seva repercussió en el nivell d'algunes respostes (ingènues, acabades «un pas abans»).

Resposta 4

	Quins són els resultats que surten «més sovint»?	Doneu algun motiu, argumenteu-ho
Suma	6-7-8-10	Atzar. . .
Resta	2-3.	Atzar. . .
Multiplicació	4, 18 24, 6 i 5	atzar.
Nombre més gran	6, 5	Atzar. . .

3 En quin dels quatre casos (suma / resta / multiplicació / major) creieu que és més probable que «surti parell»?

La multiplicació

Per què?

Perquè poden tocar gairebé tots fins a 36, menys els primers, i al restar-les queden mes parells.

La situació general plantejada també ha estat compresa (encara que, segons les observacions del professorat, no prou ràpidament); però, igual que en l'exemple segon, el seu «propòsit no explícit» (la reflexió per a l'anticipació) no ha estat copsat fins a la part final de l'activitat, on es plantejava en termes més explícits.

És per això que l'àmbit al qual s'ha portat la representació del problema és també molt pobre: essencialment empirisme recolzat en alguna reflexió i terminologia de caràcter molt ingenu.
La solució al problema (tercer apartat, en conjunt) es pot considerar admissible; malgrat que l'argumentació prové de l'anàlisi ingènua abans esmentada, és bastant original i té una certa base de consistència.

Quant a la interacció alumne–alumne, de les observacions del professorat i de les valoracions del grup mateix es dedueix que es tracta d'un grup en què han interactuat prou bé tots quatre membres, amb un mateix nivell d'implicació, d'aportació d'idees i de bon nivell de treball; no obstant això, hi havia ganes d'enllestir la feina ràpidament, com en realitat ha estat, supravalorant la rapidesa enfront de la qualitat (pot deduir-se, per les diferents grafies, que la segona columna de la taula ha estat emplenada per quatre persones diferents, cosa que suggereix una compleció ràpida i sense discussió en el si del grup).

Resposta 5

	Quins són els resultats que surten «més sovint»?	Doneu algun motiu, argumenteu-ho
Suma	El 7, el 6 i el 5	~~Perquè aquest surten més operacions pots fer amb aquest número~~. Perque pots canviar la variació dels numeros per exemple: 6+1 i 1+6, així amb tot.
Resta	1 i el 2	Perque hi ha moltes operacions que donen aquest numero.
Multiplicació	El 6 i el 4	Perque hi ha moltes oparacions que donen aquest numero.
Nombre més gran		

3 En quin dels quatre casos (suma / resta / multiplicació / major) creieu que és més probable que «surti parell»?

En la suma.

Per què?

Perque a mi m'ha surtit així

Aquest grup ha necessitat molt de temps i alguns suggeriments del professorat per a comprendre la situació general plantejada i el propòsit de l'activitat. Per a entendre aquesta dificultat i en general el procés de resolució seguit, cal començar comentant la interacció alumne–alumne; es tracta d'un grup de tres en què només un dels membres s'ha immergit realment en la feina i ha portat el gros del pes de l'activitat; malgrat que tots tres hi han estat implicats i no hi ha hagut moments de distracció importants al llarg de l'activitat, la feina dels altres dos es reduïa a escoltar les idees i aportacions del primer i a seguir consignes.

En aquest marc d'interacció és on cal analitzar els àmbits desiguals en els quals es representa el problema: l'operació suma (realitzada pel líder del grup —vegeu segon apartat—) és analitzada fent un recompte de possibilitats, malgrat que aquesta anàlisi no és del tot exhaustiva; tanmateix, l'anàlisi de les altres dues operacions és essencialment empírica, tot i que l'argumentació respon a un model de resposta estàndard basat en «el que diu el líder del grup» («*perquè hi ha moltes operacions que donen aquest número*»). El grup es mou en una dualitat: un membre del grup té més o menys clara l'estratègia a seguir, però no té prou temps ni capacitat per a resoldre ell sol tota l'activitat, i els seus companys només són capaços de seguir les indicacions del «líder».

Aquesta falta de contrast o de retroalimentació amb la resta del grup és el motiu que la resposta a l'apartat tercer sigui «la suma» (l'operació analitzada per aquest membre) i la seva argumentació caigui en una barreja d'ingenuïtat i d'empirisme («*perquè a mi m'ha sortit així*»).

Resposta 6

	Quins són els resultats que surten «més sovint»?	Doneu algun motiu, argumenteu-ho
Suma	2,3,4,5,6,7,8,9,10 11,12,	Per que els resultats han sortit aixi.
Resta	0,1,4.	Perque, ~~tes~~ restes bastantes m'han donat aquests resultats
Multiplicació	12,25,8,30,6,36, 16,9,3,10,2,5,1.	Perqué al fer la multiplicació han sortit més cops aquests numeros.
Nombre més gran	6	Perqué de totes les vegades que hem tirateb daus, ha Sortit el 6.

3 En quin dels quatre casos (suma / resta / multiplicació / major) creieu que és més probable que «surti parell»?

En la suma

Per què?

perque ~~a~~ com podem veure adalt a la taula surten parells.

Aquest grup també ha necessitat molt de temps i alguns suggeriments del professorat per a comprendre la situació general plantejada i el propòsit de l'activitat. Encara que per motius diferents, per a entendre aquesta dificultat i en general el procés de resolució seguit, també cal començar comentant la interacció alumne-alumne; es tracta d'un grup de quatre en què el nivell de col·laboració, d'implicació en el treball i de ganes de treballar ha estat realment baix; s'ha assumit que es tractava d'una activitat que era obligatòria de fer, de la qual es derivaria una qualificació i que, per tant, s'havia de fer, però en cap cas no s'ha plantejat com un repte, no ha despertat interès i, a més, el grup no tenia cap vincle personal que el portés a la necessitat o a les ganes de col·laborar entre ells. Les aportacions eren escasses i sense continuïtat, el treball era pobre però essencialment individual, i la producció del grup ha estat estrictament la suma de les produccions individuals (observeu les diferents grafies i el fet que hi hagi respostes del tipus «*Perquè bastants restes* ***m'han*** *donat aquests resultats*»).

En aquest marc d'interacció pràcticament nul·la, s'entén que l'únic àmbit on es podia plantejar la resolució del problema és una simple descripció «del que ha passat», essencialment empírica i sense cap reflexió afegida.

Aquesta falta de contrast i aquesta desgana provoquen una resposta en l'apartat 3 en certa manera gratuïta i irreflexiva i exposada amb una argumentació sense criteri ni coherència.

Algunes consideracions amb relació al procés d'ensenyament i aprenentatge de la resolució de problemes

Com es deia en la introducció, la resolució de problemes s'associa a la capacitat que una persona té per a obtenir una solució a una situació que se li presenta, situació lligada a un propòsit que no sap assolir de forma automàtica o immediata. També s'hi deia que, per tant, es tracta, més que cap altra competència, d'un eix transversal del mateix procés d'educació.

Aquesta transversalitat es fonamenta en el fet que a la competència de resoldre problemes cal associar-hi la comprensió i el domini d'idees, procediments i processos propis de l'activitat matemàtica, però també d'altres factors com els relacionats amb la comprensió de la situació i del propòsit, la representació del problema en l'àmbit adequat, la selecció i la utilització d'estratègies intel·lectuals o amb potencial heurístic, la comunicació, l'argumentació, la reflexió crítica, la creativitat...

Indubtablement, sobre aquesta competència hi cooperen la resta de competències i tot el currículum en general; dit d'una altra manera: entre d'altres recursos, l'alumnat ha de poder disposar d'un bagatge de coneixements i competències matemàtics, alhora que també científics. Però això no hauria d'implicar que acabés considerant la resolució de problemes (RP) com «l'aplicació del treball matemàtic a l'aula», fent una «classificació» de diferents tipologies de problemes en funció del camp matemàtic; per exemple, «problemes de proporcionalitat», «problemes de fraccions», per no dir «problemes de multiplicació» o qualsevol altre de la mateixa naturalesa. Això el podria portar que, quan es troba amb un problema, els primers esforços (o fins i tot els únics) se centrin a identificar «paraules clau» en l'enunciat que li permetin «classificar» el problema i «aplicar» aquells coneixements matemàtics que s'hi associen. Aquest fet s'ha pogut observar clarament en alguns exemples de respostes donades a algunes activitats de la Cb14, analitzats en pàgines anteriors.

Considerar el treball explícit, a l'aula, d'altres competències com les abans esmentades (comprensió, comunicació, argumentació...) i promoure valors i actituds relacionats, per exemple, amb la creativitat, la flexibilitat i la reflexió crítica pot ser ja en si mateix útil per a fer viure aquesta transversalitat. En posteriors paràgrafs es reprendran aquests arguments.

Amb relació a les estratègies intel·lectuals, pot ser interessant fer algun comentari. En primer lloc, convé dir que, en aquesta edat, les estratègies a treballar poden fer un pas endavant vers la simple (i no per això fàcil o ja assolida) traducció del llenguatge verbal a l'aritmètic. En segon lloc, tot i que parlar d'estratègies és sense cap mena de dubte entrar en un terreny complex i «relliscós», algunes (com, per exemple, organitzar la informació, fer diagrames o esquemes, representar, treballar de forma sistemàtica, provar de veure què passa amb exemples senzills...) poden ser treballades a primer cicle de secundària, en el nivell i amb els exemples adequats a l'edat; en qualsevol cas, cal admetre que hi ha un seguit de competències que són prèvies (per exemple, la comprensió lectora). Finalment, sembla que hi ha un important consens entre els experts a admetre que només l'alumnat molt capacitat arriba de forma autònoma a nivells adequats de capacitat de selecció i utilització d'aquestes estratègies, la qual cosa justifica la necessitat de treballar-les explícitament i de forma més o menys planificada a l'aula.

Si es revisen les pàgines anteriors, especialment l'anàlisi de les activitats 2.4 i 20, s'observaran exemples d'errors que es deriven de la manca d'hàbit o del desconeixement en la utilització d'estratègies com, per exemple, la identificació i l'anàlisi sistemàtica de possibilitats.

Assumir la transversalitat abans esmentada porta a considerar que la pregunta rellevant del professorat probablement no ha de ser tant la de *quins són els coneixements i maneres de procedir que l'alumnat ha d'anar desenvolupant per a millorar la seva capacitat de resoldre problemes?*, sinó la molt més ambiciosa (i difícil de portar a la pràctica perquè aborda un repte important) d'abordar el repte de *quins són els aspectes que influeixen en la millora de la capacitat de RP de l'alumnat?*

La diferència entre ambdues perspectives és que en aquesta segona no solament s'inclou la idea de *què aprèn l'alumnat*, sinó també les de *com ho aprèn, què sent, com se sent, què en pensa, com ho viu, què veu i percep, com controla el que sap, què sap en relació amb el que sap*, preguntes que, malgrat que puguin semblar retòriques, teòriques o fins i tot improcedents per a un treball dia a dia, esdevenen a vegades més rellevants i més útils que les que se centren estrictament en els coneixements: per exemple, sovint es troba en les idees suara comentades l'única explicació al fet que a vegades l'alumnat amb molt alt rendiment acadèmic cometi errors «inexplicables» o es bloquegi en determinats problemes no estàndard. En altres paraules, hi ha explicacions a determinats errors i bloquejos que no es poden anar a buscar en mancances d'aprenentatge de l'alumnat, sinó en aspectes com les emocions, les actituds, les creences, les condicions prèvies al plantejament del problema... També s'ha fet esment d'algun d'aquests aspectes en l'anàlisi d'errors de les activitats 2.4, 10.2 i 20.

Per aquest motiu, es pot considerar important abordar tres eixos de consideracions per a la millora del procés d'ensenyament i aprenentatge: les característiques de les tasques que es proposen a l'alumnat, l'organització d'aquestes tasques i el paper del professorat durant aquest procés. Només unes reflexions per a cada eix.

Amb relació al primer d'aquests eixos, les característiques de les tasques que es proposen a l'alumnat, aquestes idees haurien de contribuir a evitar que l'alumnat entengui la RP com una capacitat que es desenvolupa estrictament en l'àmbit escolar. Hi ha tot un seguit d'apreciacions sobre les quals és fàcil coincidir: en el dia a dia, fora de l'aula es presenten una infinitat de problemes quotidians més o menys complexos que no necessiten grans coneixements matemàtics (les activitats 2.4 i 10.2 en són exemples); sovint els ciutadans resolen aquests problemes sense prendre consciència que estan resolent un problema, i val a dir que hi apliquen estratègies o maneres de procedir prou originals i creatives; però també a vegades les maneres de procedir davant aquestes situacions són pobres o inefectives. El fet de plantejar a l'aula un problema d'aquestes característiques a vegades provoca la necessitat de simplificar el context o les condicions en les quals s'aborda, convertint la situació en significativament diferent de la real; sovint també s'exigeix que aquestes situacions quotidianes plantejades a l'aula es resolguin pels procediments estrictament acadèmics.

En la mesura en què aquestes apreciacions (discutibles i no generalitzables) s'admetin, hi ha un seguit de consideracions a tenir presents a l'aula: no convertir massa sovint (no es pot negar que té la seva importància fer-ho «quan toca») la contextualització en una simple il·lustració del problema quan, de fet, el que es vol és proposar una activitat per a «practicar» una estructura matemàtica; si una situació quotidiana necessita excessiva simplificació, cal pensar que probablement no és un problema adequat a l'edat; admetre les estratègies «informals», utilitzar-les a continuació com a eina de reflexió per a millorar-les, incorporar-les o desestimar-les; posar a vegades el centre d'atenció en la situació quotidiana, en tota la seva complexitat i ambigüitat, identificant (o demanant que s'hi identifiquin!) els diferents problemes que s'hi associen...

En la comprensió de la situació no solament hi influeix la capacitat de comprensió verbal, o comprensió lectora, que òbviament podria ser el primer obstacle, sinó també la capacitat per a comprendre i integrar informació provinent de diferents fonts (verbal, gràfica, icònica, pictòrica, simbòlica...), la capacitat per a seleccionar la informació necessària d'entre un conjunt ampli, la capacitat per a destriar aquella que és redundant o innecessària... Sembla que hauria de ser, d'una banda, la varietat d'experiències treballades a l'aula i, d'altra banda, la reflexió explícita sobre tots aquests aspectes el que pot facilitar el desenvolupament d'aquesta capacitat.

Així, podria ser convenient que l'alumnat treballés situacions de naturalesa molt diferent de la informació: situacions concretes - situacions generals, situacions donades amb precisió - situacions donades amb ambigüitat, situacions que contenen informació redundant o innecessària - situacions que necessiten informació provinent de moltes fonts simultàniament o informació complementària que cal identificar i recercar (o que forma part del bagatge cultural de l'alumnat)... També podria ser convenient que es treballés un ampli ventall de propòsits, no solament situacions en què es requereix l'obtenció d'un resultat numèric: prendre una decisió, optimitzar o buscar la millor opció, verificar o argumentar, obtenir una pauta, explorar una situació, construir o dissenyar...

En un altre ordre de coses, aquesta varietat de tasques podria incloure no solament situacions rutinàries, sinó també moltes altres de més riques, per bé que accessibles, tant des de la perspectiva didàctica (que motivin, que captin l'interès, que esdevinguin un repte, que admetin diferents nivells de resposta...) com des de l'epistemològica (que siguin rellevants en l'àmbit matemàtic, que estableixin connexions, que admetin diferents processos de resolució, que obrin camps nous...).

Quant al segon eix, l'organització de la feina, probablement els tres aspectes que s'hi podrien destacar serien: l'adequat equilibri entre treball individual i treball en petits grups, la comunicació i la reflexió del procés, i tots tres són inseparables.

Un exemple de model organitzatiu que pot ser útil és el que es va proposar en la prova de grup de les Cb14, salvant les diferències òbvies entre una activitat d'avaluació i una activitat formativa. Recordem-ne les fases:

a) Una fase prèvia, que es pot desenvolupar tant en el gran grup classe com en petits grups, depenent dels casos, que pot tenir per finalitat la presentació de l'activitat o la tasca, la coordinació del que cal fer, la immersió en la dinàmica de l'activitat.

b) Una fase següent, en la qual, de forma individual, s'està abordant la problemàtica plantejada, familiaritzant-se amb el problema i adquirint interès per la tasca demanada; aquesta familiarització amb el problema pot comportar la comprensió de la situació, unes primeres propostes d'abordatge de la resolució... i, en qualsevol cas, la corresponsabilització en el futur èxit de l'activitat. En unes primeres experiències pot ser molt convenient pautar molt aquesta fase per a deixar que progressivament sigui l'alumnat qui treballi autònomament o bé que sigui el grup mateix qui s'organitzi.

c) La fase posterior ja és de treball en petits grups i és aquí on es pretén provocar l'intercanvi d'idees, raonaments i argumentacions, validar o refutar conjectures... i finalment prendre decisions. És molt important en aquesta fase que s'evitin judicis ràpids, que s'eviti acceptar o desestimar idees «perquè sí», que es deixi constància de tot el que es diu o s'acorda...

d) L'activitat pot continuar amb una reflexió grupal i individual sobre el treball en grup desenvolupat, tant en termes de valoració general com de valoració individualitzada, com també en termes de reflexió entorn del propi paper jugat en el treball.

e) Finalment —i això òbviament no formava part obligatòria de la prova Cb14— pot ser convenient que hi hagi una «posada en comú» sobre el què i el com s'ha fet. Aquí el paper del professorat és cabdal, i s'aborda en posteriors paràgrafs. En fases de treball molt avançades sota aquest model, acostuma a ser molt útil fer un pas endavant: demanar que cada grup avaluï/comenti/analitzi les resolucions donades per altres grups. No cal dir que novament el paper del professorat és cabdal, en tant que ha d'explicitar clarament el que s'espera que es faci, en quant ha d'intercanviar adequadament els informes generats per l'alumnat (en la mesura en què hi haurà grups amb resolucions admissibles i altres amb resolucions inadmissibles, grups amb un procés de resolució i altres amb processos molt diferents, processos molt ben explicats/argumentats i d'altres no tant o no gens...).

Finalment, quant al tercer eix (el paper del professorat), ningú no descobrirà res si es diu que probablement és el més important. Per a simplificar-ho, es poden distingir tres moments. Amb relació a la planificació prèvia, és del professorat de qui depèn la selecció de les tasques de classe, dels problemes concrets i del moment en el qual seran plantejats; també en depèn la formulació concreta que és convenient que tinguin, la gestió de l'aula, l'organització que se'n fa, el pes treball en grup – treball individual, l'organització dels grups, les decisions entorn d'allò a què es donarà importància.

Respecte al «mentre es treballa a l'aula», s'espera del professorat que sigui el model de conducta: orientant, més que no pas marcant camí; preguntant i suggerint, més que no pas aportant respostes; animant, més que no pas censurant; experimentant, més que no pas reflexionant; explorant, fins i tot dubtant, més que no pas informant; no adoptant un llenguatge «reduccionista». I sempre... mostrant el seu «gust per la matemàtica».

Per acabar, cal plantejar un perill: aquest treball transversal pot no ser convenient de desenvolupar d'una manera excessivament diferenciada d'altres tipus de treball que indubtablement també han de ser presents a l'aula (explicacions, pràctiques, mecanitzacions...), perquè aleshores es pot produir una ruptura entre «dos tipus de matemàtiques» o, cosa encara pitjor, entre les «matemàtiques» i la «resolució de problemes», en la mesura en què no s'identifiqui que tota aquesta activitat, de naturalesa diferent, té la mateixa finalitat i ha d'avançar en paral·lel.

El següent qüestionari permet al professorat:
- Analitzar el treball que es duu a terme amb els alumnes per a la millora de la capacitat de resolució de problemes.
- Reflexionar sobre la metodologia més adient per a treballar-ho.
- Prendre decisions sobre la gestió docent per a afavorir aquesta millora.

Es recomana començar responent la graella individualment i continuar amb una posada en comú en els departaments i en els equips docents a fi d'arribar a acords de millora.

Qüestionari

A classe...	Molt sovint	Sovint	Alguna vegada	Gairebé mai
...amb relació a la selecció d'activitats i/o problemes...				
...s'intenta plantejar la resolució dels problemes com el nucli de l'organització de les classes, no pas com la seva conclusió.				
...es disposa d' un bon arxiu de problemes/activitats, que completa el llibre de text (o el substitueix).				
...se'n proposen de tipologies diverses perquè així no estereotipin la manera de procedir: p. ex., no tots són aritmètics, n'hi ha de geometria/visualització, de relacions funcionals, de recomptes...				
...també n'hi ha que demanen propòsits diferents del de calcular un resultat numèric, propòsits com el de buscar la millor opció, argumentar el perquè d'una decisió, obtenir una pauta, construir un model...				
...també n'hi ha que tenen enunciats no verbals: p. ex., gràfics, simbòlics, pictòrics...				
...també n'hi ha alguns en els quals cal integrar informació de diferents fonts o d'altres en què falten dades o n'hi ha d'excessives; en alguns altres fins i tot la informació és ambigua o molt general...				
...es proposen també problemes oberts, fins i tot que puguin tenir diferents nivells de resposta, de manera que el mateix problema pugui ser proposat a diferents nivells d'alumnat i cadascun pugui obtenir un cert grau de satisfacció de «feina feta».				
...es proposen situacions freqüents de la vida real (algunes força complexes) de cadascuna de les quals l'alumnat ha de formular diferents enunciats de problemes, cadascú d'acord amb les seves capacitats.				
...es proposen problemes l'única finalitat dels quals és treballar una bona col·lecció d'estratègies de resolució de problemes o processos de tipus intel·lectual com, p. ex., fer esquemes, provar amb exemples senzills o conjecturar.				

...un cop proposat un problema o una activitat, el paper del professorat és...				
...organitzar la classe en petits grups de treball, homogenis o heterogenis segons les diferents finalitats.				
...crear un ambient de preguntes entorn de situacions matemàtiques sobre les quals cal discutir i arribar a alguna conclusió.				
...aplicar estratègies que afavoreixin la comunicació alumne-alumne i l'intercanvi d'idees.				
...potenciar decisions de l'alumnat dirigides a l'obtenció d'informació complementària, fins i tot externa, quan convingui.				
...proporcionar material manipulatiu o material quotidià que faciliti l'experimentació i potenciar-la.				
...potenciar l'ús de les TIC en general com a element que faciliti les tasques rutinàries i/o que permeti desenvolupar simulacions o experimentacions.				
...potenciar que els bons alumnes col·laborin en tasques d'ensenyar a qui més costa, quan s'escaigui, o que desenvolupin tasques específiques d'ampliació en altres moments.				
...orientar i moderar el treball autònom.				
...aplicar estratègies per a fomentar aspectes com la perseverança i la flexibilitat en els intents de resolució, l'autoestima, el gust per les matemàtiques...				
...potenciar la intuïció, la reflexió, la creativitat i tot un conjunt de processos d'aquesta naturalesa.				
...donar pautes (ensenyar) per a la redacció d'informes de la resolució i potenciar que ho facin.				
...per damunt de tot, organitzar un treball globalitzador, que potenciï la funcionalitat.				
...amb relació a la tasca desenvolupada per l'alumnat, quan el professorat la valora/avalua...				
...potencia l'autocorrecció a partir de criteris prèviament explicitats.				
...dóna pautes per a la reflexió davant l'error, més que no pas observa i corregeix l'error en si mateix, alhora que el desmitifica.				
...incita i afavoreix la reflexió i la revisió del procés com a actitud a interioritzar.				
...valora la creativitat i no solament la correcció; en particular valora també les idees discrepants i el pensament alternatiu.				
...dóna pautes per a l'elaboració de plans de millora.				
...adapta els ritmes, el plantejament de la classe i les decisions a les observacions efectuades a l'aula.				
...amb vista a l'avaluació sumativa, utilitza tècniques múltiples d'avaluació, que permetin obtenir informació sistematitzada sobre el grau de competència que té l'alumnat per a identificar, comprendre i resoldre situacions amb l'ajuda de les matemàtiques.				

Una vegada estudiats els resultats de la graella, els departaments i els equips docents poden plantejar-se preguntes i arribar a acords sobre:

- quines de les propostes es treballen a les aules?
- com es treballen?
- fins a quin punt les diferents metodologies emprades per cada departament faciliten l'aprenentatge?
- quines no es treballen prou?
- quines es consideren prioritàries?
- des de quines àrees es poden treballar?
- en quins aspectes es pot incidir més adequadament, tenint presents les característiques específiques de cadascuna de les assignatures implicades?

Es recomana triar-ne algunes entre les que es considerin prioritàries, ordenar-les i planificar-ne l'aplicació. En la planificació cal incloure:

- com s'avaluaran? (quan, qui i com s'avaluaran).

Annex. Relació de competències i activitats en què són avaluades

	Prova	Material per a l'aplicació
Cicle inicial	CI 1	Quadern
	CI 2	Quadern
	CI 3	Quadern
	CI activitat oral	Làmina i quadern de correcció
Cicle mitjà	CM 1	Quadern
	CM 2	Quadern
	CM 3	Quadern i làmina
	CM activitat oral	Làmines i quadern de correcció
Cicle superior	CS 1	Quadern
	CS 2	Quadern
	CS 3	Quadern
	CS 4 (TIC)	Quadern i CD-ROM