Algunes activitats de caire geomètric en el bloc de numeració i càlcul

Observacions generals

El bloc de numeració i càlcul molt sovint és el bloc de continguts curriculars al qual es dedica més temps de classe en detriment especialment del bloc d'espai i forma. Assegurar una bona comprensió dels conceptes referents a la numeració i un cert nivell de destresa en els procediments de càlcul és important per poder abordar bé altres continguts matemàtics. Tanmateix aquest argument no hauria de retenir-nos, més enllà d'un temps prudencial, en el bloc de numeració i càlcul. Una excessiva inversió de classes en aquest bloc pot comprometre, per manca de temps, un bon treball en altres blocs. L'experiència demostra que no sempre els beneficis d'un allargament en el treball sobre procediments de càlcul compensen els consegüents desavantatges de la manca de possibilitats de dedicació a altres blocs no pas menys importants.

La introducció d'aspectes geomètrics en el treball dins de numeració i càlcul no tan sols pot beneficiar l'assoliment de coneixement geomètric sinó que també pot contribuir molt a una millor comprensió dels continguts aritmètics, aportant visualització, interpretació gràfica i aplicació concreta. Aquesta no és una idea més o menys nouvinguda, ben al contrari, la història de la matemàtica és plena de trobades entre l'aritmètica i la geometria: des dels nombres figurats (triangulars, quadrats, pentagonals, piramidals...) dels pitagòrics fins a l'expressió gràfica de fraccions com a parts d'una àrea, des de la construcció d'irracionals del tipus $\sqrt{n}$ amb regle i compàs o amb programes de geometria dinàmica (a través dels teoremes de Pitàgores o d'altura) fins a l'origen geomètric d'alguns irracionals transcendents com el nombre π (relació entre longitud i diàmetre en una circumferència) i el nombre φ (que expressa la relació àuria, cànon de bellesa, present en determinats rectangles i en els pentàgons, per exemple), des de la demostració gràfica de resultats numèrics (per exemple: $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$) fins al sentit geomètric d'algunes operacions aritmètiques... També a les classes corresponents al bloc de numeració i càlcul hauríem de posar de manifest aquests enllaços aprofitant oportunitats com les citades i moltes d'altres. No tan sols reforçaríem el treball geomètric sinó que milloraríem la comprensió de les idees aritmètiques.

Aquests enllaços són un territori idoni per treballar la competència 9 de la dimensió de comunicació i representació (*Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic*). La ubicació dels nombres sobre la recta numèrica o el significat d'un quadrat com una àrea i d'un cub com un volum són excel·lents exemples d'aquesta diversitat de representacions que enriqueix la comprensió.

El mateix Henri Poincaré (1854 – 1912), un dels pares de la matemàtica actual, posa en valor les representacions en el camp de l'ensenyament del càlcul quan afirma "*Tan sols hi ha dos mètodes per ensenyar fraccions: tallar, encara que sigui mentalment, un pastís, o fer-ho amb una poma. Amb qualsevol altre mètode d'ensenyament, els escolars prefereixen sumar numeradors amb numeradors i denominadors amb denominadors*". Poincaré era un defensor

de la intuïció com a força creadora de idees matemàtiques. Una comprensió més intuïtiva (visual, gràfica, geomètrica...) de les idees aritmètiques podria contribuir a evitar aquella prematura mecanització dels procediments de càlcul que, massa sovint, acaben sent pures receptes i perden la seva base conceptual.

La incorporació d'aspectes geomètrics en el bloc de numeració i càlcul pot respondre a diverses intencionalitats didàctiques com les següents:

- Per introduir idees. Un exemple: La representació de fraccions unitàries com a longituds de barretes (de la meitat de la unitat, d'un terç, d'una quarta part...) és un excel·lent procediment per introduir la necessitat de calcular el comú denominador en la suma i resta de fraccions.

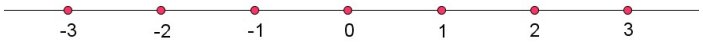
- Per visualitzar magnituds i relacions concretes. Un exemple: La representació de fraccions com a parts d'una figura (un cercle, un rectangle, un quadrat...) ajuda molt a la comprensió de determinats problemes aritmètics.

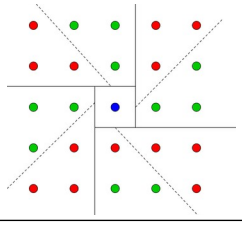
- Per aplicar procediments de càlcul. Els problemes de geometria molt sovint tracten dades numèriques (enteres, racionals, irracionals...) el maneig de les quals també és una manera de treballar expressions aritmètiques.

- Per mostrar o demostrar propietats. Els exemples són abundants: des de demostrar que la suma de dos nombres triangulars consecutius és un quadrat perfecte fins a calcular la suma de la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, un càlcul que fet per procediments aritmètics depassa els continguts d'ESO però que, mostrat de manera gràfica, és molt fàcilment comprensible. La força de les representacions geomètriques per introduir, visualitzar, demostrar o aplicar idees aritmètiques es posa de manifest de manera brillant en el llibre *Demostraciones sin palabras* de Roger B. Nelsen i en les excel·lents obres sorgides de la col·laboració entre ell i Claudi Alsina (*Math made visual*, *Charming Proofs: A Journey into Elegant Mathematics*, *Icons of Mathematics: An Exploration of Twenty Key Images*, *When Less is More: Visualizing Basic Inequalities*...)

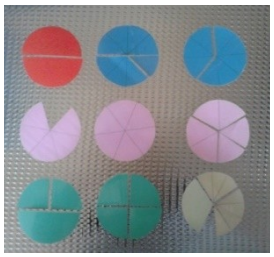
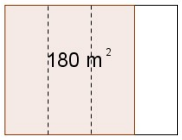
Hauríem doncs de procurar aprofitar totes les oportunitats possibles per tal de donar presència a la geometria en el treball que fem dins del bloc de numeració i càlcul. Això, no tan sols consolidaria coneixements geomètrics, sinó que aportaria una major visualització de les idees aritmètiques, milloraria la comprensió dels conceptes i dels procediments de càlcul i establiria valuoses connexions internes. En l'apartat següent es presenta una mostra de diverses activitats que poden enriquir didàcticament el treball dins del bloc de numeració i càlcul i, alhora, permeten posar en joc continguts geomètrics. En alguns casos les activitats tan sols s'apunten i es referencien. En altres casos les propostes s'amplien adjuntant presentacions específiques amb diversos apartats: títol, agrupament, material, breu descripció, continguts més rellevants que es tracten, dimensions i competències que es poden treballar especialment...

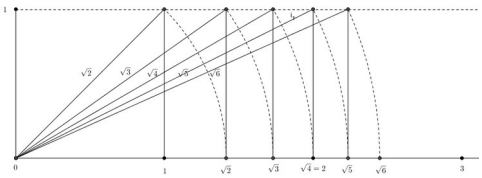
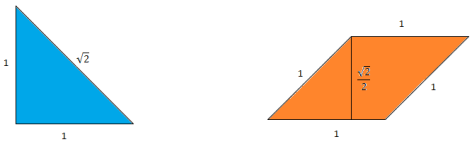
Quadre amb exemples d'activitats

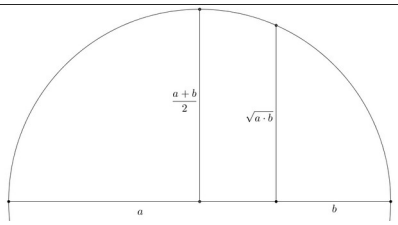
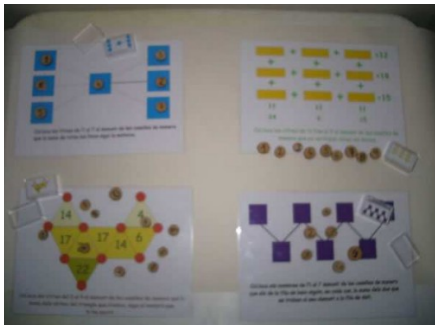
Activitat	**Comentaris i referències**
La geometria de la recta numèrica	 La distribució dels nombres reals sobre una recta (la recta real en la qual primer ubicarem els naturals i els enters, després els racionals i finalment els irracionals) representa ja una connexió clara amb la geometria. Caldrà atendre a l'origen (el 0) i a la longitud que es prengui com a unitat per anar situant els diferents valors amb certa cura. L'ordenació de nombres i el seu comportament respecte del canvi de signe, la intercalació de nombres racionals i de nombres irracionals, la seva densitat, els intervals i les semirectes... són idees aritmètiques que, sobre la recta real, prenen formes geomètriques que ajuden a la seva comprensió. Un cas particular de representació visual mitjançant l'ordenació de nombres sobre una recta són els frisos cronològics on es representen els anys a partir d'un origen (que se sol prendre com l'any del naixement de Crist, malgrat que sembla que hi va haver alguna errada en la seva determinació inicial). Una bonica activitat per posar de manifest el significat d'un canvi de sistema de referència és la que es descriu tot seguit. Es demana a cada alumne que construeixi un petit fris cronològic assenyalant el seu any de naixement així com el dels seus pares, avis, germans (si en té) i altres persones de la seva família (convé que hi hagi membres més grans i també algun més petit que ell). Llavors es convida l'alumne a elaborar un nou fris cronològic però aquesta vegada prenent com a origen el seu any de naixement (en cas que no hi hagi dates de naixement de membres de la família més petits que ell es pot prendre com a origen l'any de naixement d'un dels seus pares o d'un germà més gran). Caldrà re-calcular els *nous* anys de naixement dels diferents membres de la família en el nou sistema de referència, prenent com a any 0 el del naixement de l'alumne (curiosament en el nostre còmput dels anys l'any 0 no va existir). Apareixeran anys anteriors i anys posteriors al del naixement d'aquest membre de la família (suposem que es diu Maria). Així potser l'any de naixement de la mare serà el 26 aM, l'any de naixement del pare serà l'any 27 aM o l'any de naixement del seu germà petit serà el 3 dM. És interessant observar com, amb el canvi de sistema de referència, canvien els valors dels anys però no canvien les diferències entre ells (distància entre dos punts del fris). És una activitat senzilla però molt interessant que permet

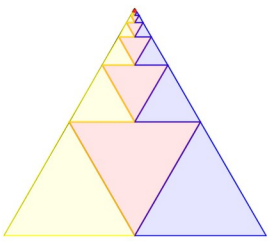
	practicar amb sistemes de referència sobre la recta numèrica.
L'ús de reglets numèrics per a visualitzar idees i propietats aritmètiques	 Sovint sembla que ús dels reglets numèrics (siguin els de Cuisenaire, siguin els de la Maria Antònia Canals) està circumscrit únicament a l'educació primària. Si bé és en aquesta etapa on poden ser més útils, també poden ser adequats per contribuir a visualitzar determinats continguts de l'ESO. Aquests reglets permeten donar sentit geomètric a operacions i propietats aritmètiques. A l'ARC hi ha una proposta dedicada als reglets de Cuisenaire (http://apliense.xtec.cat/arc/node/221) que porta adjunt un document amb informació i activitats per a l'alumnat on es plantegen tres exemples interessants de l'utilització d'aquest material a l'educació secundària. Els dos primers exemples estan descrits per Pere Puig Adam en el seu llibre *Didáctica Matemática Eurística* (1956): un és per treballar les congruències i les classes residuals i l'altre per introduir les progressions aritmètiques d'ordre superior. De cap manera es pot considerar que siguin temes elementals malgrat que es basin en la utilització dels reglets de Cuisenaire. També a l'ARC hi ha un element dedicat als reglets de la Maria Antònia Canals (http://apliense.xtec.cat/arc/node/350) que porta adjunt un document amb propostes d'activitats. A l'ESO pot ser interessant, per exemple, l'ús de reglets per il·lustrar propietats aritmètiques o per calcular, de manera molt gràfica, arrels quadrades de nombres relativament petits. El número 110 dels *Dossiers de la Maria Antònia Canals* publicats per l'Associació de Mestres Rosa Sensat està dedicat precisament al càlcul amb reglets numèrics.
Nombres figurats	

	Els nombres figurats són nombres que poden ser representants per un conjunt de punts equidistants entre ells situats seguint un patro geomètric. Així hi ha nombres triangulars, nombres quadrats (potser són els més coneguts), nombres pentagonals, nombres hexagonals... Fins i tot poden seguir patrons tridimensionals, com seria el cas dels nombres piramidals. El fet que aquests nombres puguin ser representats per figures geomètriques permet deduir gràficament, de manera força senzilla, propietats aritmètiques, a vegades sorprenents. Són indispensables de citar en una anàlisi com la que es fa aquí. A ells es dedica la proposta d'activitats que porta per títol *Nombres figurats*.
Interpretació de les fraccions unitàries mitjançant barretes que expressen parts d'una unitat	 Es tracta d'un material molt senzill que fins i tot pot ser construït pel mateix alumnat. Malgrat la seva simplicitat té moltes possibilitats didàctiques. Aquest material permet treballar la idea de fracció, el concepte de numerador i de denominador, l'ordenació de fraccions, l'equivalència de fraccions, el comú denominador i la suma i la resta de fraccions. A l'ARC hi ha una proposta amb el títol *Quadre de fraccions unitàries* que inclou una plantilla retallable i un guió d'una activitat per fer amb alumnes (http://apliense.xtec.cat/arc/node/209). És una activitat molt potent i, en algun aspecte, poc coneguda. En la part que fa referència a la suma i resta de fraccions (per exemple 1/2 + 1/3) s'observa com la necessitat de calcular el denominador comú de les dues fraccions sorgeix de la necessitat de mesurar les dues barretes (una barreta de 1/2 de la unitat i una barreta de 1/3 de la unitat) emprant un patró de mesura amb el qual es pugui amidar exactament una i altra (una barreta de 1/6 de la unitat). En el fons fer comú denominador per sumar i restar fraccions és una estratègia de mesura! És un exemple molt clar de com les idees geomètriques poden

	contribuir a clarificar conceptes aritmètics.
Representació de fraccions mitjançant sectors circulars o parts de rectangles, quadrats o altres figures geomètriques	 La idea de fracció, desenvolupada al final de primària i en els primers cursos de l'ESO, es veu molt afavorida per l'ús de representacions gràfiques com a parts de figures geomètriques. Novament aquí l'aritmètica i la geometria tenen un punt de confluència que les enriqueix mútuament. S'adjunta una proposta d'activitat que, amb el títol de *Representació de fraccions mitjançant sectors circulars o altres figures geomètriques*, presenta diverses possibilitats de treball a l'aula entorn a la visualització del concepte de fracció, de l'equivalència, l'ordenació i la simplificació de fraccions, de les operacions amb fraccions...
Enfocament gràfic de problemes de fraccions	 Hi ha determinats problemes de fraccions que admeten raonaments gràfics molt clars i elegants. És bo aprofitar aquestes oportunitats. A continuació, a tall de mostra, s'inclouen tres exemples d'aquest tipus de problemes. ▪ Tres quartes parts d'un solar amiden 180 m^2, quan amida el solar sencer? ▪ Tres germanes es reparteixen un terreny. La Maria es queda una tercera part, la Núria es queda la meitat de la resta del terreny i a la Teresa li corresponen els 2000 m^2 que queden. Quina era la superfície total del terreny? ▪ La Laura ha menjat una cinquena part d'un pastís, en Josep, que és molt llaminer, ha menjat tres quartes parts de la resta i, finalment, en Joan s'ha menjat els 60 g que quedaven de pastís. Quina quantitat de pastís ha menjat en

	Josep?
Construcció gràfica de nombres racionals i de nombres irracionals del tipus $\sqrt{n}$	 Quan se situen els nombres sobre la recta real és natural que sorgeixi la dificultat d'ubicar exactament aquells que tenen infinits decimals: mai acabaríem de posar el nombre en la seva posició correcta! Aquest és el cas, per exemple dels nombres racionals periòdics i dels nombres irracionals del tipus $\sqrt{n}$. Algunes propietats geomètriques (els teoremes de Tales, de Pitàgores i de l'altura, els angles inscrits en circumferències...) permeten construir segments que amidin exactament aquests nombres la qual cosa seria impossible simplement mesurant. És una bona oportunitat per revisar i posar en joc o, fins i tot, per introduir aquests resultats geomètrics, fent una interessant connexió interna. S'adjunta una proposta d'activitat que, amb el títol de *Construcció gràfica de nombres racionals i de nombres irracionals del tipus* $\sqrt{n}$, presenta aquesta possibilitat d'ús d'eines de geometria en el camp de la numeració.
Donant joc geomètric a la irracionalitat de $\sqrt{2}$	 L'escola pitagòrica ja es plantejava el problema de la incommensurabilitat de magnituds prenent una unitat concreta. Així, per exemple, $\sqrt{2}$ no es podrà mesurar prenent com a unitat 1. Això vol dir que no existeixen dos nombres enters a i b tals que $a\sqrt{2}=b$. En la proposta d'activitat que porta per títol *La irracionalitat de* $\sqrt{2}$ *i un mosaic molt especial* es presenta una sorprenent idea de Pere Puig Adam per treballar a classe entorn d'una interpretació geomètrica d'aquesta característica essencial de la relació entre $\sqrt{2}$ i 1.
Representació gràfica i comparació	

de la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica.	 Aquesta és una proposta tan concreta com interessant des del punt de vista geomètric. Els alumnes han de conèixer el teorema de l'altura i els conceptes de mitjana aritmètica i de mitjana geomètrica de dos nombres, per tant serà adequada per l'últim tram de l'ESO o primer curs de batxillerat. Aquesta activitat es descriu amb més detall en la proposta que porta per títol *Comparació gràfica de la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica*.
Trencaclosques de càlcul mental	 Es tracta d'un conjunt de plantilles, ideades per l'Ignasi del Blanco, cadascuna de les quals planteja un repte numèric que comporta posar en joc dos tipus d'habilitats matemàtiques: ▪ El càlcul mental. ▪ Les estratègies lògiques. Hem de disposar de fitxes amb nombres (a vegades a classe es poden emprar simplement trossets de paper) que es van movent sobre la plantilla. És molt interessant observar com el moviment de les fitxes dóna molta més agilitat a l'activitat i l'atorga un alt nivell d'interès per a l'alumnat. És com si el moviment facilités l'estratègia i el càlcul mental. Si es fa per parelles també té l'interès, gens menor, de provocar la necessitat d'explicar a l'altre l'estratègia que es proposa. Aquest material té un gran poder motivador. Sovint l'activitat a classe amb aquests trencaclosques acaba amb alguns alumnes o grups d'alumnes que no volen deixar de continuar intentant esbrinar la solució.

	En aquesta activitat es pot observar com la geometria de la plantilla convida al raonament aritmètic i en condiciona les estratègies. A l'ARC hi ha una proposta que descriu el treball amb aquests trencaclosques i inclou un fitxer adjunt amb les plantilles a punt d'imprimir i portar a classe (tan sols falten les fitxes amb nombres): http://apliense.xtec.cat/arc/node/349 . També, a l'Edu3, es pot veure un vídeo del funcionament a classe: http://www.edu3.cat/Edu3tv/Fitxa?p_id=40341&p_to=trencaclosques%20de%20c%E0lcul%20mental .
Propietats numèriques a partir de puzles geomètrics	 Són molt abundants les propietats numèriques que poden ser demostrades a partir del maneig de figures geomètriques. De fet aquest seria un cas general del que s'ha comentat sobre nombres figurats en una altra proposta. En els llibres de Roger B. Nelsen i Claudi Alsina que s'han esmentat anteriorment hi ha abundants exemples d'aquests puzles. El Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA, http://www.mmaca.cat/index.php) té una bona col·lecció de puzles geomètrics amb rerefons aritmètic, com el de la imatge. És molt recomanable fer-hi una visita!
Càlcul gràfic de sumes d'infinits termes	 Aquest és un exemple molt significatiu d'un tema aparentment complicat que, emprant recursos visuals i propietats geomètriques,

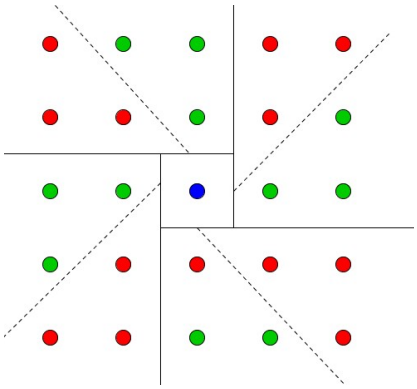
1 Fotografia d'un mòdul del MMACA (Museu de Matemàtiques de Catalunya).

	pot ser tractat sense grans dificultats en els darrers cursos de l'ESO. Sovint els nostres alumnes tenen la idea prèvia que sumant infinits nombres positius el resultat que s'obté és tan gran com es vulgui. És bonic descobrir que no és així endinsant-se una mica en el camp de les sumes infinites i, en particular, de determinades sèries geomètriques. Potser ens pot fer una mica de respecte el concepte de *sèrie* que és objecte d'estudi en els cursos universitaris però no ens hauria de fer por tractar algunes idees com aquesta amb els nostres alumnes sempre que ho fem intuïtivament i com a pinzellades introductòries, sense avançar formalitzacions innecessàries pel que es pretén. De fet tan sols necessitem posar en joc algunes idees sobre operacions i representació gràfica de fraccions i deixar-nos portar per l'observació visual. Aquesta activitat es desenvolupa amb detall en la proposta que porta per títol *Suma de sèries geomètriques*.

Proposta d'activitat

Títol: Nombres figurats

Imatge:



Agrupament:

Malgrat que es pot optar per una presentació més directa del professor, una molt bona manera de treballar amb nombres figurats i les seves propietats consisteix en què els propis alumnes manipulin fitxetes o cubs encaixables o dibuixin sobre trames ortogonals o isomètriques en paper. Aquestes exploracions seria bo de fer-les en parelles per tal de promoure la comunicació d'idees i petites descobertes.

Material:

Trames ortogonals o isomètriques dibuixades en paper, petites fitxetes, cubs encaixables...

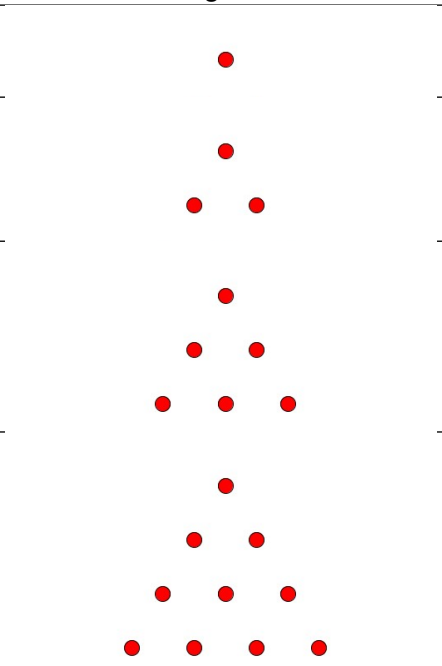
Descripció:

Els nombres figurats són nombres que poden ser representants per un conjunt de punts equidistants entre ells situats seguint un patro geomètric. Així hi ha nombres triangulars, nombres quadrats (potser són els més coneguts), nombres pentagonals, nombres hexagonals... Fins i tot poden seguir patrons tridimensionals (com seria el cas dels nombres cúbics o dels nombres piramidals).

Els nombres figurats ja varen ser introduïts pels pitagòrics que donaven al nombre un significat místic. En particular cal destacar el nombre 10 (quart dels nombres triangulars) al qual atorgaven una importància especial pel fet que és el resultat de sumar dels quatre primers nombres naturals: $1+2+3+4=10$. Filolao (deixeble de

Pitàgores, nascut a Crotona) diu que la "*dècada*" és "*gran, totpoderosa i generadora de tot, inici i guia tant de la vida divina com de la terrestre*".

El quadre següent mostra els sis primers nombres triangulars:

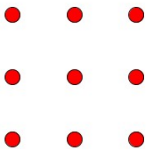
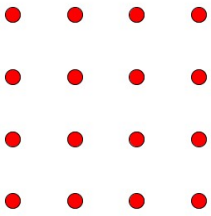
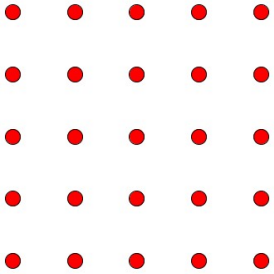
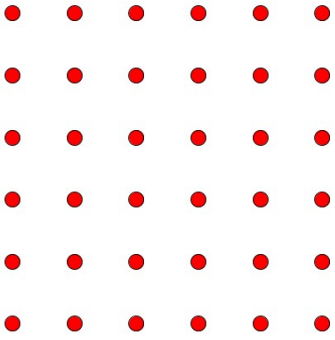
Nombre triangular	Figura
1	
3	
6	
10	
15	
21	

Si el nombre n indica l'ordre del nombre triangular, la seva expressió algebraica és:

$$T_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

La comprovació d'aquesta fórmula ja és una bona activitat de classe (per anar enfocant les successions) i, en els cursos més avançats, és pot fer la seva deducció a partir de la suma de la progressió aritmètica $1+2+3+4+\ldots+n$. Probablement a classe serà interessant recordar la història atribuïda a Gauss quan el seu mestre els va demanar de sumar tots els nombres naturals de l'1 al 100. La seva tècnica de suma il·lustra molt bé la demostració de la fórmula anterior.

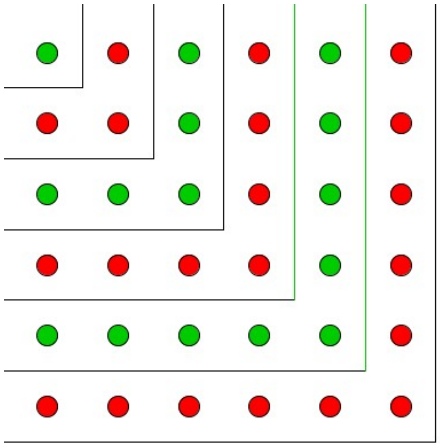
El quadre següent mostra els sis primers nombres quadrats:

Nombre quadrat	Figura
1	
4	
9	
16	
25	
36	

Naturalment, si el nombre n indica l'ordre del nombre quadrat, la seva expressió algebraica serà $Q_n = n^2$.

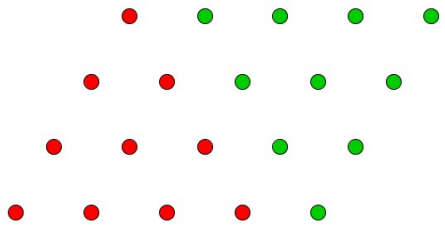
El fet que aquests nombres puguin ser representats per figures geomètriques permet deduir gràficament, de manera força senzilla, propietats aritmètiques, interessants. A continuació se'n presenten diverses que poden ser portades a classe. En cada cas es mostra la imatge i l'expressió algebraica general, tanmateix amb els alumnes serà interessant anar deduint l'expressió algebraica a partir de la imatge.

Suma de nombres imparells consecutius a partir de l'1:



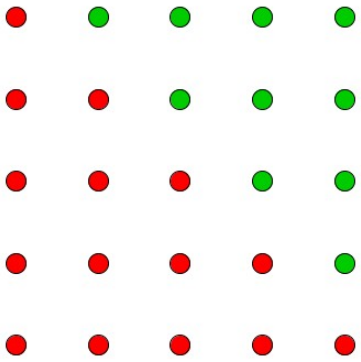
$$1+2+3+4+\ldots+(2n-1)=n^2$$

El doble d'un nombre triangular:



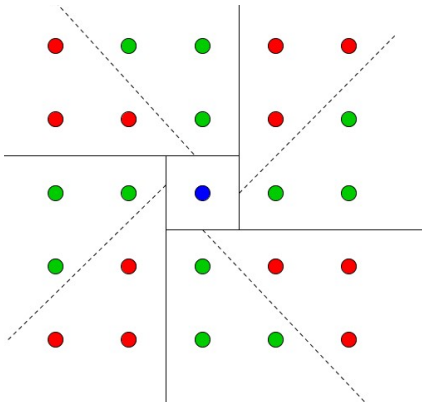
$$2\,T_n = n(n+1)$$

Suma de dos nombres triangulars consecutius:



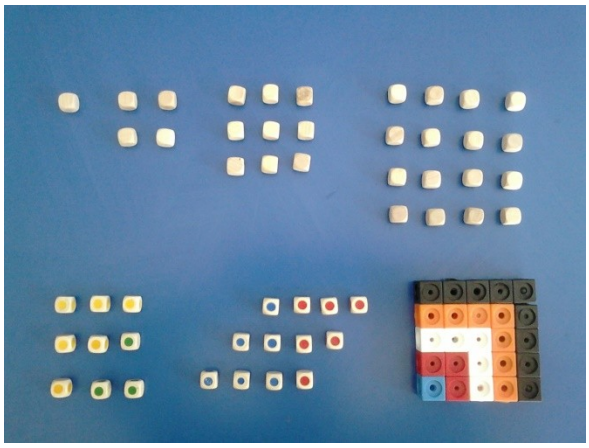
$$T_{n-1}+T_n=n^2$$

Vuit vegades un nombre triangular, augmentat en una unitat, és igual a un nombre quadrat:



$$8T_n+1=(2n+1)^2$$

Aquestes propietats i moltes més també es poden mostrar o convidar a descobrir fent construccions amb fitxetes o cubs encaixables com les que es mostren en la imatge següent:



Continguts més rellevants que es tracten:

Numeració, Pitàgores com a personatge històric i l'escola pitagòrica, nombres triangulars, nombres quadrats, diverses propietats aritmètiques demostrades amb nombres figurats.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Aquest conjunt d'activitats són exemples clars del treball entorn de la competència 7 de la dimensió de connexions (Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar) i la competència 9 de la dimensió de comunicació i representació (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic). Es veu molt clar com la representació gràfica d'on nombre permet fer deduccions matemàtiques.

Comentaris i referències:

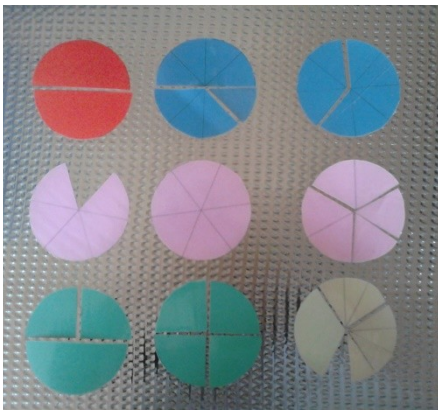
És molt interessant observar com els nombres, a través de les figures que els representen, adquireixen una evidència visual que quasi fa que es puguin tocar. Aquesta visualització els dóna una vida sensorial que té enorme potència didàctica, una mostra de la qual són les propietats aritmètiques que se'n poden deduir.

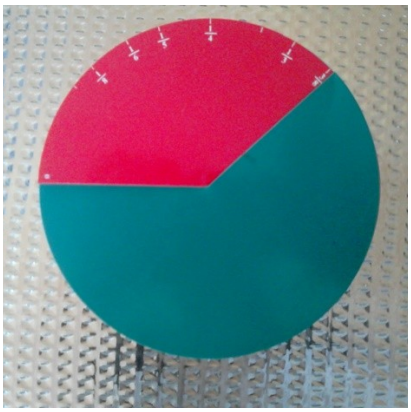
En el llibre *Demostraciones sin palabras* de Roger Nelsen i en el llibre *Math made visual*, *Creating Images for Undestanding Mathematics* de Claudi Alsina i Roger B. Nelsen apareixen moltes demostracions a partir de nombres figurats. Són fonts inesgotables de possibilitats per portar la visualització amb idees geomètriques a les classes de matemàtiques.

Proposta d'activitat

Títol: Representació de fraccions mitjançant sectors circulars o altres figures geomètriques

Imatge:





Agrupament:

Divers segons l'activitat que es plantegi.

Material:

Sectors circulars retallats amb paper plastificat, transportador d'angles, cercle de fraccions, cubets encaixables, dominós de fraccions, cartes de fraccions impròpies.

Descripció:

La idea de fracció, desenvolupada al final de primària i en els primers cursos de l'ESO, es veu molt afavorida per l'ús de representacions gràfiques com a parts de figures geomètriques. Novament aquí l'aritmètica i la geometria tenen un punt de confluència que les enriqueix mútuament.

Molt sovint s'utilitza la representació de fraccions com a sectors circulars. Si bé com a introducció potser és més fàcil treballar amb barretes que expressen parts de la unitat (proposta del quadre d'exemples d'activitats del bloc de numeració i càlcul), un cop establerts els conceptes bàsics, la representació mitjançant sectors pot ser molt útil. Observem que un sector circular dóna molta més informació que una barreta: imaginem-nos que tenim una barreta i un sector circular que sabem que representen

una fracció d'una unitat. En el cas de la barreta no podrem establir quina fracció representa que ja no coneixem quina és la barra unitat. En el cas del sector sí que podem saber la fracció que representa ja que la unitat correspon al cercle complet, a l'angle de 360°.

A continuació s'apunten diverses activitats que poden fer-se entorn a la relació entre fraccions i figures:

- Donat un sector circular, identificar a quina fracció correspon o donada una fracció, construir un sector circular que la representi. Ens hi poden ajudar dos materials:

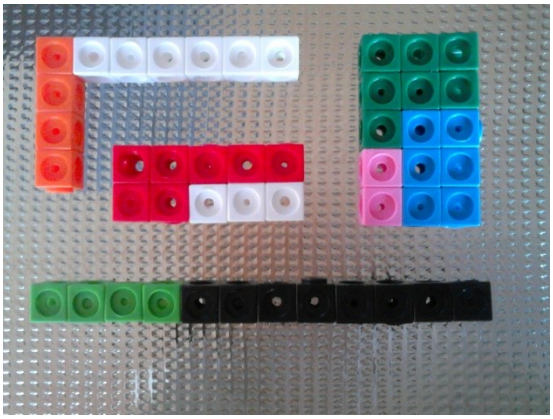
  Sectors retallats amb cartró plastificat com els de la primera figura de l'encapçalament. Poden ser sectors que mostrin ratlles orientatives o no. En alguns casos haurem d'emprar el transportador d'angles. Sobre aquest material pot veure's la proposta http://apliense.xtec.cat/arc/node/212 de l'ARC.

  El "cercle de fraccions" format per dos cercles oberts al llarg d'un radi que es travessen mútuament i que poden anar-se obrint i tancant (imatge de la dreta en l'encapçalament). A l'ARC hi ha una proposta d'ús d'aquest material: http://apliense.xtec.cat/arc/node/211.

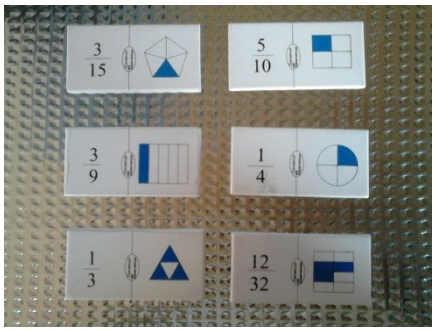
- Emprar parts de quadrats, de rectangles, de pentàgons, d'hexàgons... per representar fraccions i, a la inversa, identificar les fraccions que es representen com a parts d'aquestes figures. És important que l'alumne comprovi que totes les parts són iguals i que el conjunt de les parts recobreixen exactament la figura. Es poden fer parts amb formes diverses de manera que no sempre sigui immediat fer les comprovacions indicades. A vegades caldrà argumentar-ho!

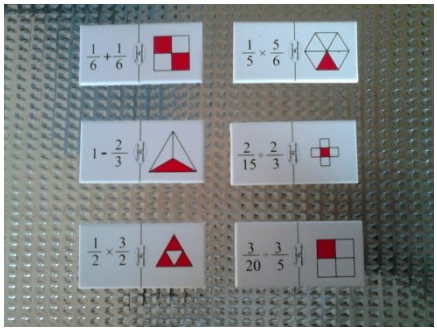
- Emprar el programa GeoGebra per tal de construir sectors circulars corresponents a fraccions donades. En alguns casos (quan es tracti de meitats, de terços, de quartes parts, de sisenes parts, de vuitenes parts...) el sector es podrà construir exactament de manera fàcil, en altres casos es podrà optar per fer un dibuix aproximat emprant el mesurador d'angles. També es pot utilitzar el GeoGebra per construir altres figures dividides en parts que representin fraccions. La construcció es pot fer per parelles i després, projectant les figures conjuntament, anar deduint la fracció que representa cadascuna d'elles.

- Les mateixes activitats que s'han descrit poden fer-se amb petites figures construïdes amb cubets encaixables com les que mostra la imatge següent:



- “Jugar” al dominó amb fitxes de fraccions. Cada fitxa està formada per dues parts: una part conté una fracció o una operació amb fraccions i l’altra part conté una figura que representa una fracció. S’hi “juga” com en el dominó normal però ajuntant sempre expressió numèrica i representació gràfica. Es pot trobar més informació en la proposta de l’ARC http://apliense.xtec.cat/arc/node/354



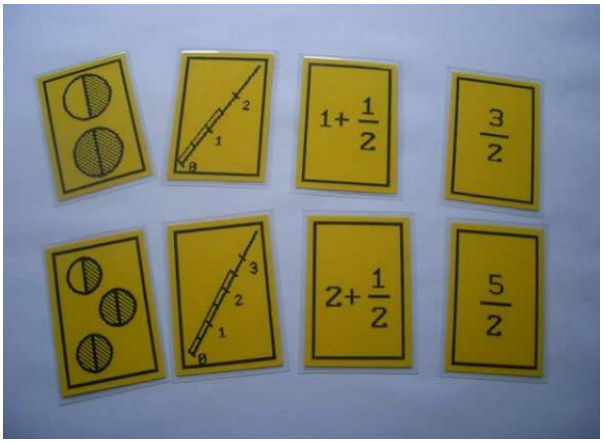


En el dominó amb figures de color blau l’alumne, en alguns casos, haurà de simplificar (mentalment) les fraccions per poder adonar-se de les coincidències. Això els alumnes ho fan fàcilment com a part del joc. En el dominó amb figures de color vermell cal fer operacions. En aquest cas (malgrat que es permeti emprar paper i llapis) els alumnes solen desconnectar del joc, com si la força lúdica de l’activitat no aconseguís compensar la “complexitat” aritmètica que comporta. Es tracta d’una bonica comparació entre dos recursos molt semblants que funcionen ben diferent a l’aula i que mostren la subtil relació entre la força didàctica d’un material i la càrrega conceptual que suporta.

- Observis que en tots els casos anteriors s’ha treballat la visualització de fraccions més petites que la unitat ja que eren parts d’una figura. Són les anomenades fraccions pròpies. Tanmateix també és interessant treballar amb fraccions impròpies en les quals el numerador és més gran que el denominador i que poden ser expressades també de manera mixta com a suma d’un enter i una fracció pròpia. En aquests casos la representació s’haurà de fer mitjançant més d’una figura. Un bon material per treballar amb aquestes fraccions són les anomenades “Cartes de fraccions impròpies” que són cartes amb dues particularitats:

- En lloc d'estar numerades de l'1 al 12, corresponen a fraccions impròpies com 2/3, 2/5, 2/7, 3/5, 4/11...

- Cada "puntuació" està representada amb quatre "pals": sectors circulars, parts d'un segment, expressions mixtes i fraccions impròpies.



Es pot jugar a diferents jocs: fer parelles, fer famílies... En l'ARC es presenta una proposta que ho detalla: http://apliense.xtec.cat/arc/node/353. Aquesta idea està inclosa en l'excel·lent llibre *Matemàtiques a la carta* d'Isabel Batlle, Teresa Serra i Montserrat Torra.

Continguts més rellevants que es tracten:

Concepte de fracció, ordenació, equivalència, simplificació, operacions amb fraccions, associació entre fraccions i parts d'una figura, sectors circulars, polígons, identificació de parts de figures, construcció de figures geomètriques amb GeoGebra.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Totes les activitats plantejades permeten treballar especialment dues competències: la competència 7 de la dimensió de connexions (Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar) i la competència 9 de la dimensió de comunicació i representació (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic). Si es convida als alumnes a explicar com construeixen les associacions entre fraccions i figures també es contribuirà a treballar la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques).

Comentaris i referències:

Totes aquestes activitats ofereixen l'oportunitat de tractar idees geomètriques quan s'estan treballant les fraccions a classe:

- Per un costat, en cadascuna de les propostes, no hauríem de perdre l'ocasió de posar en joc aspectes geomètrics de les figures implicades, convidant a formular argumentacions, emprant terminologia adequada, aplicant propietats...

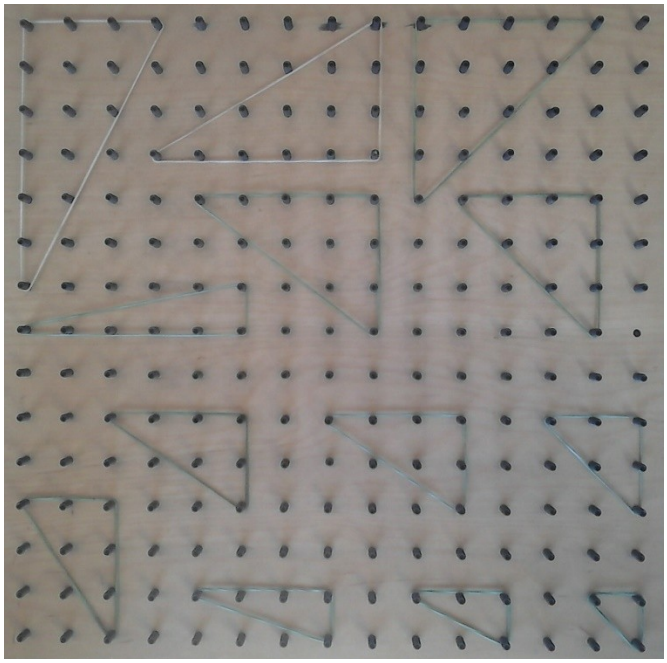
- Per l'altre, a través de la visualització que ofereixen les figures geomètriques, es reforçarà la comprensió del concepte de fracció, de l'equivalència, l'ordenació i la simplificació de fraccions, de les operacions amb fraccions...

Com ja s'ha indicat, l'ARC conté forces propostes que detallen aquestes activitats. També se'n troben d'interessants en el llibre *Matemàtiques a la carta* d'Isabel Batlle, Teresa Serra i Montserrat Torra que, si bé està centrat a l'educació primària, té activitats que són útils per als primers cursos de l'ESO.

Proposta d'activitat

Títol: Construcció gràfica de nombres racionals i de nombres irracionals del tipus $\sqrt{n}$

Imatge:



Agrupament:

La presentació de la necessitat de realitzar construccions gràfiques i de les eines per portar-les a terme l'haurà de fer el docent de forma conjunta. Després els alumnes, de manera individual, podran fer les seves construccions.

Material:

Regle, escaire, compàs, geoplans i el programa GeoGebra.

Descripció:

En emprendre la construcció gràfica de nombres racionals amb infinits decimals periòdics i de nombres irracionals del tipus $\sqrt{n}$ cal posar atenció en alguns aspectes:

- **Plantejar clarament l'objectiu que ens proposem assolir**: la determinació d'un segment la longitud del qual sigui exactament el nombre que volem representar.

- **Justificar-ne la necessitat** a partir de la impossibilitat de determinació exacta d'aquest segment simplement mesurant per molt precís que pogués ser el regle que emprem donat que caldria fixar un nombre infinit de decimals.

- **Tenir en compte la base teòrica requerida**. Segons el cas caldrà revisar el teorema de Tales, el teorema de Pitàgores, les propietats dels angles inscrits en una circumferència, el teorema de l'altura... Sense aquesta fonamentació la construcció no té sentit.

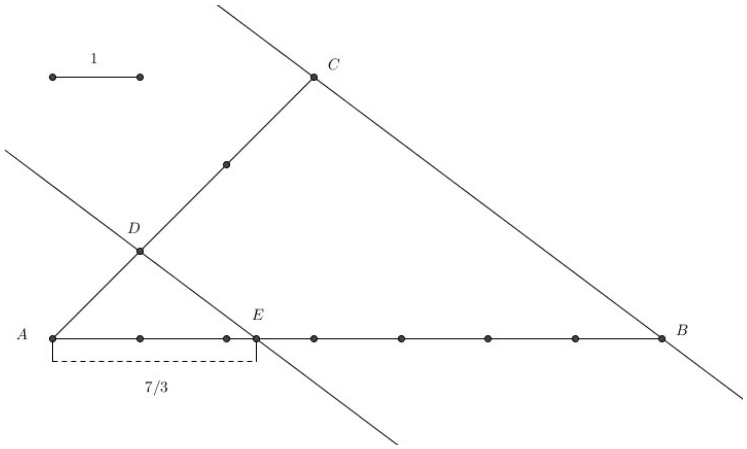
- **Deixar clara la unitat de mesura**. Assenyalar el segment que prenem com a unitat de longitud. A la pissarra un segment de 10 cm sol funcionar molt bé. Si la unitat no queda clara la longitud del segment resultant perd sentit.

- **Tenir cura en la realització**. A vegades, quan la construcció es fa a la pissarra, s'ometen certes precaucions per què, fent abstracció dels detalls, ja es donen per suposades (les perpendiculars o les paral·leles són poc perpendiculars o poc paral·leles, els moviments del compàs són aproximats...). Això resulta paradoxal quan precisament s'està perseguint l'exactitud en la determinació del segment. Malgrat les limitacions físiques de la pissarra, del guix, del compàs, del llapis... cal donar i transmetre la impressió de cura extrema. En aquest sentit l'ús de les pissarres digitals i del programa GeoGebra és fonamental.

- **Constatar que el resultat és aproximadament l'esperat** tot mesurant el segment amb tanta precisió com sigui possible i comparant amb el resultat numèric que ens dóna la divisió o l'arrel.

Les construccions que es presenten a continuació s'haurien de fer en diferents moments de l'ESO, quan els alumnes disposin d'un bon coneixement de les propietats geomètriques que les fonamenten. Les construccions, no es descriuen pas a pas (són ben conegudes) però es comenten i se'n fa una representació gràfica.

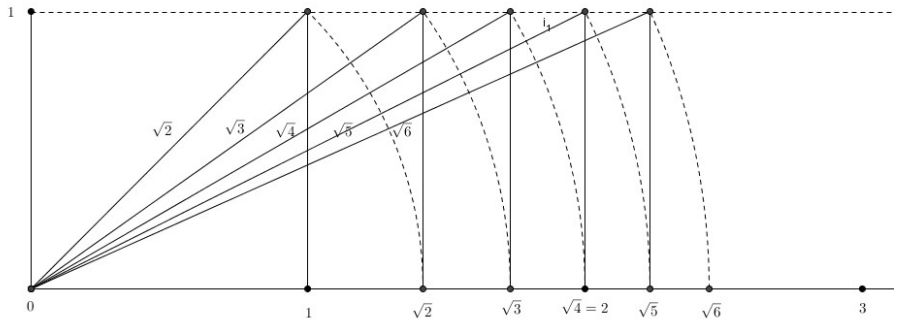
1. Construcció de nombres racionals aplicant el teorema de Tales.



La figura anterior mostra la construcció gràfica del nombre $\frac{7}{3}$. El segment AB mesura 7 unitats i el segment AD té una longitud que no cal que sigui la unitat. Es perllonga AD fins a obtenir el segment AC que tingui longitud 3 vegades AD. Després es traça la recta que uneix B i C i la seva paral·lela que passa per D. Aquesta recta talla a AB en el punt E, donant lloc a dos triangles semblants. A partir de la proporcionalitat de la longitud dels costats d'aquests triangles s'obtindrà que la mesura del segment AE és exactament $\frac{7}{3}$.

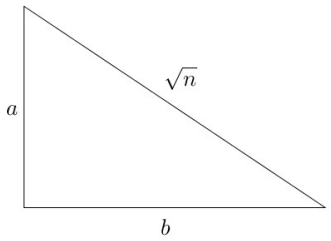
2. Construcció de nombres irracionals del tipus $\sqrt{n}$ aplicant el teorema de Pitàgores.

   - De manera successiva, tal com mostra la imatge, un cop construït $\sqrt{n}$, per construir $\sqrt{n+1}$ apliquem el teorema de Pitàgores a un triangle rectangle de catets 1 i $\sqrt{n}$. Cada cop abatrem el segment obtingut sobre la recta real per tal que quedi clar el punt corresponent i puguem aplicar de nou el teorema. En aquest procés (que podria iniciar-se en punts més avançats que la unitat) naturalment observarem una bonica coincidència amb les mesures exactes quan construïm $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$...



   - De manera directa en alguns casos particulars en què existeixen dos nombres enters *a* i *b* tals que $n = a^2 + b^2$ (per exemple $n = 13$, $13 = 2^2 + 3^2$). En aquest cas

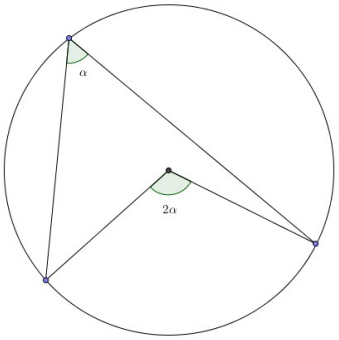
n'hi haurà prou en construir un triangle rectangle de catets *a* i *b* de manera que, pel teorema de Pitàgores, la seva hipotenusa serà $\sqrt{n}$:



Les construccions anteriors podran fer-se amb GeoGebra i també amb un geoplà gran com mostra la imatge que encapçala aquesta proposta. De fet els geoplans ortogonals són unes eines excel·lents per il·lustrar, de manera manipulable, la "producció" de segments de longituds tipus $\sqrt{n}$ ja que ofereixen un entorn ideal per a l'aplicació del teorema de Pitàgores.

3. Construcció de nombres irracionals del tipus $\sqrt{n}$ aplicant el teorema de l'altura.

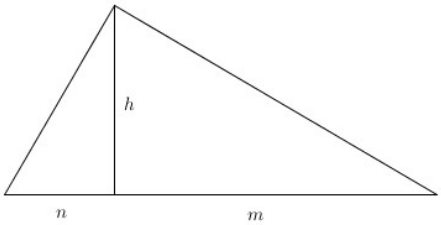
A part del teorema de l'altura ens caldrà emprar una idea interessant de treballar a classe: el fet que un angle inscrit en una circumferència mesura la meitat de l'angle central que abasta. La construcció amb GeoGebra permet anar observant com, en moure, els punts sobre la circumferència, les mesures dels angles inscrit i central mantenen la seva relació:



En el quadre d'exemples d'activitats del bloc d'espai i forma es presenta una proposta per treballar aquesta propietat amb material manipulable.

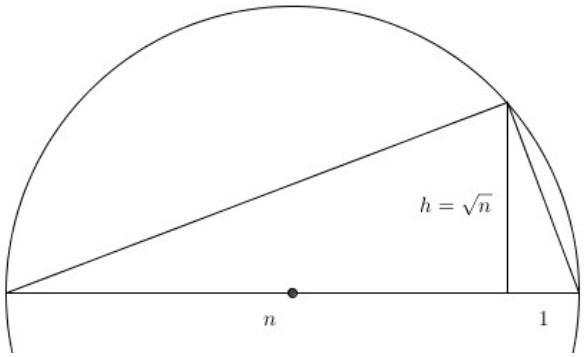
Observis que, en particular, tot angle inscrit que abasti un diàmetre sencer és recte. Una bonica manera de construir angles rectes!

A partir del resultat anterior la construcció de qualsevol nombre del tipus $\sqrt{n}$ és fàcil aplicant el teorema de l'altura que és una de les propietats mètriques més boniques d'un triangle rectangle. Considerem un triangle rectangle com el de la figura:



El teorema de l'altura afirma que la longitud de l'altura (*h*) que va des de l'angle recte a la hipotenusa és la mitjana geomètrica de les longituds dels dos segments en què divideix a la hipotenusa (*n* i *m*): $h=\sqrt{n\cdot m}$.

Combinant aquest teorema amb la propietat que s'ha comentat referent a angles inscrits que abasten un diàmetre sencer podrem fer la construcció de $\sqrt{n}$: construïm un segment de longitud n+1 i tracem una circumferència que tingui aquest segment per diàmetre. Assenyalem sobre el diàmetre un punt que estigui a distància n d'un extrem i a distància 1 de l'altre i tracem una perpendicular al diàmetre per aquest punt. Aquesta perpendicular tallarà a la circumferència en dos punts. Prenem un d'aquests punts i tracem els segments que l'uneixen amb els dos extrems del diàmetre. Així obtindrem un triangle rectangle (aquí emprem la propietat dels angles inscrits que abasten un diàmetre) com mostra la figura. Si apliquem el teorema de l'altura a aquest triangle observarem que $h=\sqrt{n}$.



Així haurem construït un segment de longitud $\sqrt{n}$. La construcció de la imatge s'ha fet per a n=7.

Continguts més rellevants que es tracten:

Construcció de nombre racionals i d'arrels quadrades no exactes, la recta real, teorema de Tales, teorema de Pitàgores, teorema de l'altura, angle inscrit en una circumferència, maneig del regle i del compàs, maneig del GeoGebra.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Amb aquestes activitats es pot treballar especialment la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques), la competència 7 de la dimensió de connexions (Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar) i la competència 9 de la dimensió de comunicació i representació (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic).

Comentaris i referències:

Observis com aquestes activitats aporten beneficis didàctics en diversos sentits:

- Contribueixen a descobrir la necessitat de fer construccions gràfiques i, en el cas de segments de longitud $\sqrt{n}$, a plantejar el problema de la incommensurabilitat tot descobrint que no només són incommensurables les magnitud molt i molt grans o molt i molt petites.

- Permeten realitzar la construcció i, per tant, ubicar uns nombres reals sobre la recta.

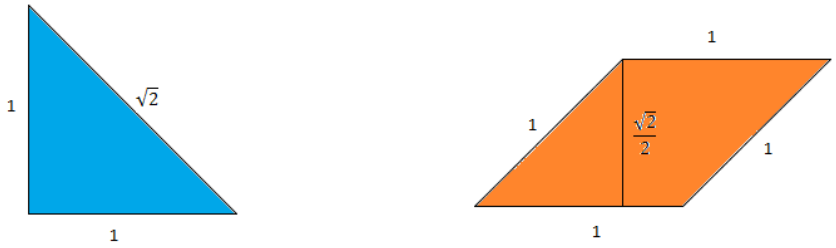
- Permeten aplicar, revisar, consolidar... algunes propietats geomètriques i emprar eines com regles, escaires, compassos o GeoGebra. La realització de les construccions amb GeoGebra les fa molt més senzilles i atractives per als alumnes.

Com s'ha dit, les construccions descrites s'haurien de presentar en moments diferents de l'ESO. Per exemple la construcció de nombres irracionals del tipus $\sqrt{n}$ aplicant el teorema de l'altura seria adequat fer-la a quart, tot creant una bonica ocasió per revisar i aplicar les idees geomètriques implicades i, alhora, per proposar una reflexió sobre el tema de la incommensurabilitat de determinades magnituds.

Proposta d'activitat

Títol: La irracionalitat de $\sqrt{2}$ i un mosaic molt especial

Imatge:



Agrupament:

Malgrat que l'activitat serà conduïda pel professor els alumnes podran treballar en parelles o en grups de tres per experimentar amb les peces, fer i compartir deduccions i aportar els seus arguments respecte de les qüestions que es vagin plantejant.

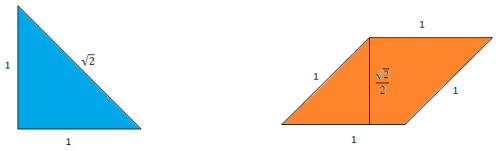
Material:

Una bona quantitat de peces de cartró retallades com les de la figura que encapçala aquesta proposta. Dues plantilles quadrades de cartró: una per la base del quadrat que es construirà i l'altra per tapar-lo.

Descripció:

L'escola pitagòrica ja es plantejava el problema de la incommensurabilitat de magnituds prenent una unitat concreta. Així, per exemple, $\sqrt{2}$ no es podrà mesurar prenent com a unitat 1. Això vol dir que no existeixen dos nombres enters a i b tals que $a\sqrt{2}=b$. La present proposta treballa precisament amb una interpretació geomètrica d'aquesta característica essencial de la relació entre $\sqrt{2}$ i 1. Es tracta d'una idea molt interessant de Pere Puig Adam que vaig conèixer gràcies a Josep Rey que l'estava treballant amb el propòsit de convertir-la en un mòdul per al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA).

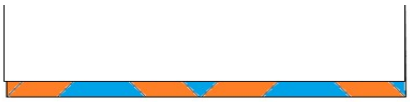
Repartim entre els alumnes peces triangulars com la de la figura blava (triangle rectangle isòsceles el catet del qual mesura una unitat) i peces ròmbiques com la de la figura taronja (de costats unitat i altura $\frac{\sqrt{2}}{2}$).



D'entrada podem preguntar als alumnes els valors dels angles interiors d'aquestes figures, dels seus perímetres, de les seves àrees (la del triangle val $\frac{1}{2}$i la del rombe val $\frac{\sqrt{2}}{2}$, això serà important més endavant en l'activitat)... i convidar-los a construir, amb aquestes peces, figures diverses. Tanmateix sorgeix una pregunta: Seria possible construir una figura formada tan sols per triangles que tingués la mateixa àrea que una figura formada tan sols per rombes? La descoberta que això és impossible es deriva de la incommensurabilitat de $\sqrt{2}$. Una bonica relació entre aritmètica i geometria!

I podem avançar un pas més fent observar el que diu Puig Adam: *Tota figura composada de triangles i de rombes tindrà una part racional procedent tan sols dels triangles i una part irracional procedent tan sols dels rombes.*

A continuació mostrem als alumnes un quadrat format per una combinació de triangles i rombes però el tapem immediatament deixant tan sols al descobert una petita franja en un dels costats com en la figura següent:



Observant la imatge deduïm que la mesura del costat d'aquest quadrat és $4+2\sqrt{2}$, i la seva àrea serà $\left(4+2\sqrt{2}\right)^2=16+2\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}+4\cdot 2=24+16\sqrt{2}$.

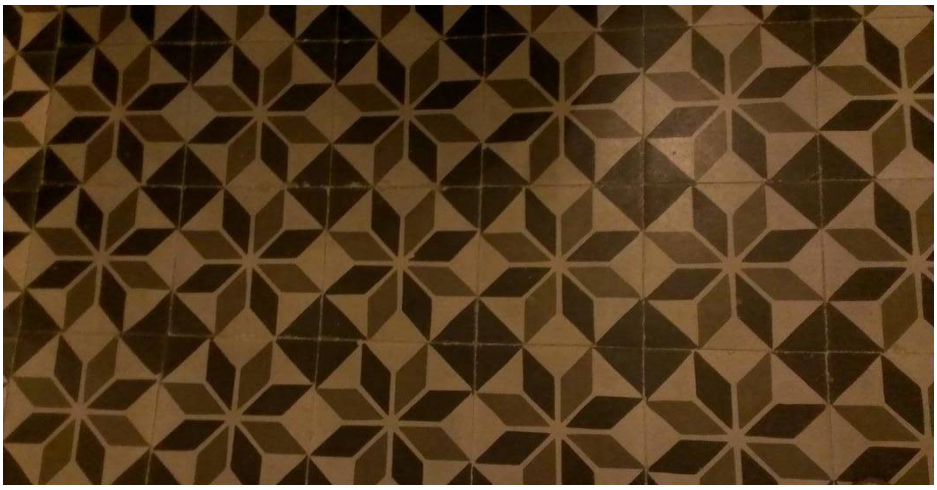
Com que tota la part racional d'aquesta expressió $24+16\sqrt{2}$ es deu als triangles que tenen àrea $\frac{1}{2}$, per força hi haurà d'haver 48 triangles. Com que tota la part irracional es deu als rombes (d'àrea $\frac{\sqrt{2}}{2}$) hi haurà d'haver-hi 32 rombes.

És sorprenent que, gràcies a una certa independència de la part racional i de la part irracional de l'expressió de l'àrea, coneixent tan sols una petita franja en un dels costats del quadrat hem pogut deduir tota la seva composició.

Això es podrà repetir amb diverses distribucions de quadrats que construeixin els propis alumnes i també amb rectangles (en aquest cas, per esbrinar el nombre de peces de cada tipus caldrà conèixer tant la base com l'altura). Sempre podrem deduir (sense veure-ho!) el nombre de triangles i el nombre de rombes que hi ha en cada

composició. Una bonica aplicació, en el camp de la geometria, de la separació entre la part racional i la part irracional d'una expressió aritmètica.

Precisament trobem aquestes peces en un mosaic de l'ermita de Sant Cristina de Lloret de Mar com mostra la fotografia següent feta per la professora Sílvia Margelí:



Continguts més rellevants que es tracten:

Irracionalitat de $\sqrt{2}$, incommensurabilitat de $\sqrt{2}$, triangles, rombes, teorema de Pitàgores, àrea d'un triangle, d'un rombe, d'un quadrat i d'un rectangle, operacions amb expressions aritmètiques, raonament lògic.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

En la dimensió de resolució de problemes aquesta proposta permet treballar especialment la competència 4 (Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes) i posar en joc la competència 2 (Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes). Podrem treballar també les dues competències de la dimensió de raonament i prova i la competència 7 de la dimensió de connexions (Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar).

Comentaris i referències:

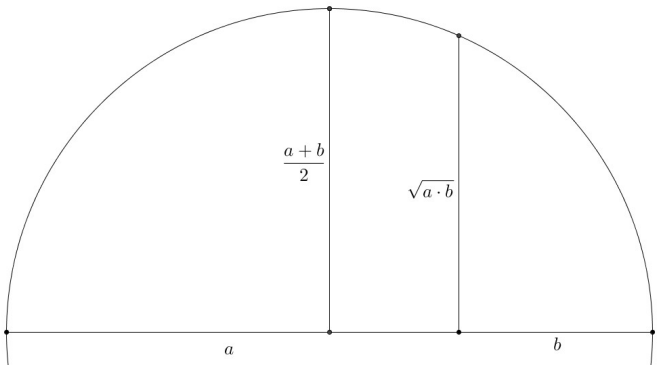
Aquest material que, com s'ha indicat, vaig conèixer gràcies a Josep Rey, ja apareix en el llibre "*Didáctica Matemática Eurística*" de Pere Puig Adam (1956) com a base d'una lliçó que ell titula "*Iniciación al cálculo con irracionales cuadráticos*". També ho va publicar el mateix any en la revista belga *Mathematica & Pedagogica* (n. 10). http://www.arrakis.es/~mcj/puigadam.htm

L’activitat descrita té l’encant de presentar una aplicació geomètrica sorprenent de la incommensurabilitat d’una magnitud respecte d’una unitat. El fet que la part racional i la part irracional d’una expressió no puguin “compensar-se” dóna unes possibilitats geomètriques sorprenents! La geometria i els nombres (racionals i irracionals) aquí es troben en una esplèndida proposta!

Proposta d'activitat

Títol: Comparació gràfica de la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica

Imatge:



Agrupament:

Els alumnes, de manera individual o per parelles, poden experimentar entorn a la mitjana aritmètica i la mitjana geomètrica de dos nombres positius. La demostració gràfica del que hagin descobert la podrà presentar el docent a tot el grup conjuntament o proposar la construcció de manera guiada per a què la vagin fent els alumnes amb GeoGebra.

Material:

Cap material específic però, segons quina dinàmica d'aula se segueixi, pot ser interessant disposar d'ordinadors per emprar un full de càlcul i el GeoGebra. També pot ser útil una pissarra digital per fer la construcció conjuntament.

Descripció:

D'entrada serà interessant revisar amb els alumnes la definició de mitjana aritmètica (p) i de mitjana geomètrica (q) de dos nombres positius (a i b):

$$p=\frac{a+b}{2} \text{ i } q=\sqrt{a \cdot b}$$

Després podem convidar als alumnes a explorar aquestes dues mitjanes calculant-les amb diferents parelles de nombres tot intentant respondre preguntes com les següents:

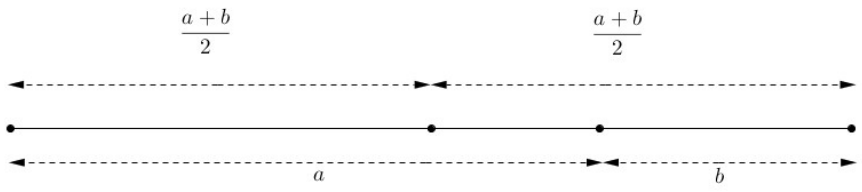
- Què passaria si algun dels dos nombres fos negatiu?
- Què passa quan un dels dos nombres és zero?
- En algun cas les dues mitjanes coincideixen?
- Quina de les dues mitjanes és més gran? Passa sempre?

L'exploració experimental entorn a aquestes preguntes (que es pot fer mitjançant un full de càlcul) anirà familiaritzant l'alumnat amb les mitjanes i acabarà amb unes conclusions que serà interessant de posar en comú: quan un i sols un dels dos nombres és negatiu la mitjana geomètrica no existeix, quan un dels dos nombres és zero la mitjana geomètrica s'anul·la, les dues mitjanes coincideixen tan sols quan els dos nombres són iguals i sempre es compleix la desigualtat:

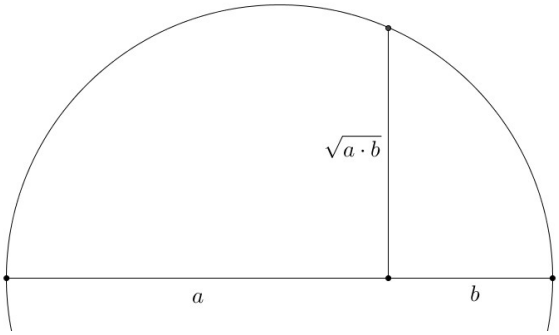
$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$

Arribar empíricament a aquestes conclusions serà fàcil per als alumnes però demostrar-les ja no ho serà tant. Aquest serà l'objectiu dels següents passos que es basaran en propietats geomètriques i que tindran un fort component visual.

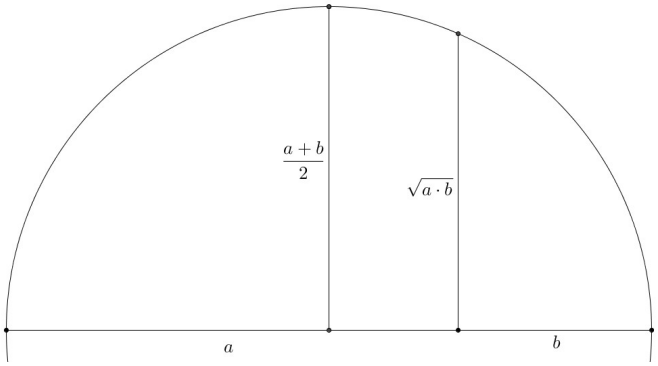
En primer lloc intentarem visualitzar la mitjana aritmètica de dos nombres positius a i b tot considerant dos segments de longituds respectives a i b. El càlcul numèric de la mitjana aritmètica consisteix a sumar a i b i, després, dividir el resultat entre 2. Fent això amb segments haurem de posar els dos segments un a continuació de l'altre i prendre el punt mig del segment resultant. El segment que uneix aquest punt mig amb qualsevol dels extrems té, òbviament, longitud igual a la meitat de la suma de les longituds dels segments i, per tant, és una representació gràfica de la mitjana aritmètica:



En segon lloc visualitzarem la mitjana geomètrica de dos segments de longituds a i b aplicant el teorema de l'altura i el fet que un angle inscrit en una circumferència mesura la meitat de l'angle central que abasta de manera que, si un angle inscrit té els seus extrems en els punts oposats d'un diàmetre, serà un angle recte. En aquest cas construirem una circumferència que tingui com a diàmetre el segment resultant de posar el segment de longitud b a continuació del segment de longitud a i aixecarem una perpendicular a aquest segment sobre el punt de contacte entre els dos segments de partida. Aquesta perpendicular tallarà a la circumferència en dos punts (simètrics respecte del diàmetre). Aplicant el teorema de l'altura podrem assegurar que el segment que uneixi un d'aquests punts de tall amb el punt de contacte entre els dos segments de partida tindrà com a longitud la mitjana geomètrica d'a i b. Aquesta construcció es pot fer amb GeoGebra. Es mostra en la figura següent:



En els passos anteriors hem visualitzat geomètricament les mitjanes aritmètica i geomètrica i ara ja podem passar a comparar-les. Això serà fàcil ja que precisament el radi de la circumferència de la figura anterior és la mitjana aritmètica (recordem la primera construcció). Així tindrem:



Aquest gràfic (i tot el procés que hem fet per fonamentar-lo) és una magnífica demostració visual que es compleix que:

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$$

A partir de la representació gràfica també es pot deduir que tan sols es compleix la igualtat entre les mitjanes si $a=b$, fet que probablement els alumnes ja hauran "descobert" experimentalment en la primera part de l'activitat però que estava pendent de demostrar. Notem també que, si b es fa petit, el segment que representa $\sqrt{a \cdot b}$ s'anirà apropant al final del diàmetre i es farà també molt petit. En el límit, si $b=0$, el segment que representa la mitjana geomètrica s'haurà reduït a un punt i tindrà longitud zero de manera que geomètricament es fa patent el que aritmèticament és obvi.

Una bonica activitat on, gràcies a idees geomètriques, demostrem gràficament una desigualtat interessant.

Continguts més rellevants que es tracten:

Mitjana aritmètica i mitjana geomètrica, angles inscrits en circumferències, teorema de l'altura, maneig d'un full de càlcul i del GeoGebra per fer construccions geomètriques.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Aquesta proposta permet treballar especialment la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques), la competència 7 de la dimensió de connexions (Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar) i, si s'utilitza un full de càlcul per a les exploracions inicials i el GeoGebra per a les construccions, la competència 12 de la dimensió de comunicació i representació (Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics).

Comentaris i referències:

Aquesta proposta ofereix una bona oportunitat per mostrar com una cosa és deduir empíricament (provant en molts de casos) una propietat i una altra cosa és demostrar-la. En aquest cas es tracta de fer una demostració visual molt elegant que posa en joc la potència d'eines geomètriques per fonamentar una idea aritmètica.

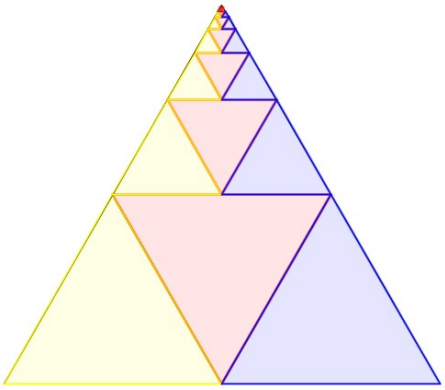
El procediment de construcció que es descriu fa servir eines que s'expliquen més àmpliament en la proposta d'activitat que porta per títol *Construcció gràfica de nombres racionals i de nombres irracionals del tipus* $\sqrt{n}$.

Aquesta idea està molt ben explicada en el llibre *Math made visual*, *Creating Images for Understanding Mathematics* de Claudi Alsina i Roger B. Nelsen.

Proposta d'activitat

Títol: Suma de sèries geomètriques

Imatge:



Agrupament:

La primera part de l'activitat (treballant amb dos fulls de paper) es pot fer conjuntament o per parelles. La segona part potser és més adequat que sigui conduïda directament pel professor, amb un bon nivell d'interacció amb l'alumnat (per exemple, serà interessant una conversa d'aula sobre la infinitud o no de sumes d'infinits nombres) . La PDI pot ser molt útil per anar mostrant, al grup conjuntament, les passes de la construcció que es fa. També es pot iniciar la construcció i deixar que els propis alumnes vagin continuant-la amb GeoGebra i, si és possible, descobreixin gràficament el resultat de la suma infinita.

Material:

Fulls quadrats de paper. Segons com es plantegi l'activitat també pot ser útil disposar d'equips per emprar el GeoGebra.

Descripció:

L'activitat que es proposa parteix d'una pregunta: Pot ser que sumant infinits nombres obtinguem un nombre "finit"?

Fàcilment els alumnes pensaran que si sumem nombres positius i nombres negatius es produeixen cancel·lacions que eviten que el resultat se'n vagi a l'infinit. Tanmateix, immediatament, sorgeix una nova qüestió: I si tots els nombres que sumem són

positius? Ara els dubtes són més seriosos i pot sorgir una conversa a classe força interessant.

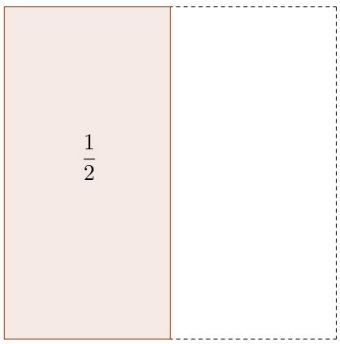
És un bon moment per convidar-los a explorar la suma:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots$$

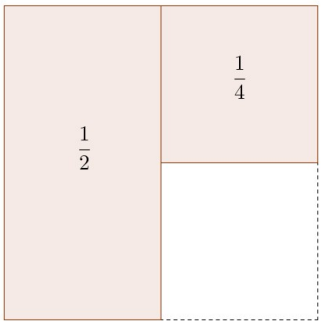
Malgrat que no sigui necessari es pot introduir, per simplificar l'escriptura, el signe del sumatori com una manera concisa de descriure sumes de nombres que responen a un mateix patró, canviant el valor d'una variable:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

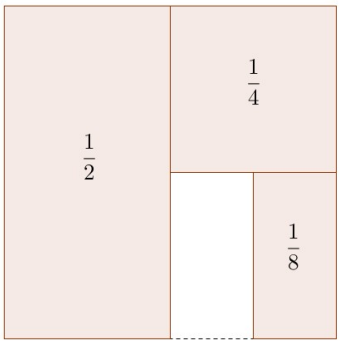
Aquesta és una suma infinita de nombres positius, no s'acaba mai. Tendirà a l'infinit? Malgrat que la primera tendència pot ser donar una resposta afirmativa a aquesta pregunta, potser podem fer una activitat que ens ajudarà a millorar la nostra percepció! Considerem un quadrat de paper que prendrem com a unitat. Agafem dues còpies d'aquest quadrat. Una còpia la posem sobre la taula. L'altra la dobleguem per la meitat, fem un séc i la partim. Col·loquem una de les dues parts sobre la còpia que hem deixat a la taula com mostra la figura:



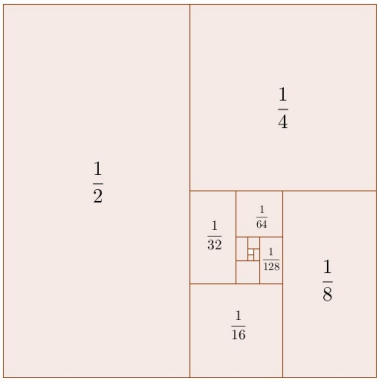
Dobleguem per la meitat l'altra part del paper, fem un séc, la dividim i col·loquem sobre la taula una de les dues meitats obtingudes, com indica la figura:



Fent el mateix un cop més amb la part de paper que queda obtindrem:



Fent-ho successivament tindrem el següent “recobriment”:



Així observarem que, per molts trossets que anem afegint, cada cop la meitat de l’anterior, mai arribarem a recobrir una superfície infinita. Ben al contrari, podrem recobrir just en el límit, després de fer-ho infinites vegades, aquell quadrat original que havíem pres com a unitat. Així podrem escriure:

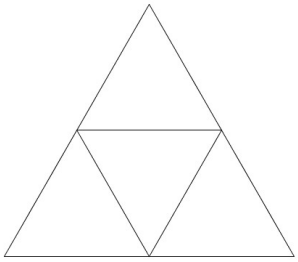
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = 1$$

Haurem fet una suma infinita amb eines geomètriques i, pel camí, haurem descobert que no sempre les sumes infinites de nombres positius tendeixen a l’infinit!

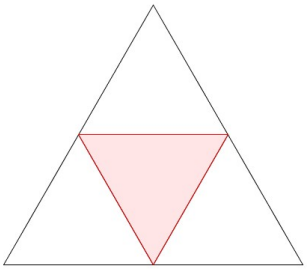
Un segon exemple pot consistir en sumar gràficament la sèrie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots$$

Prenem un triangle com a unitat i dibuixem un triangle interior unint els punts mitjos del triangle original, com mostra la figura:

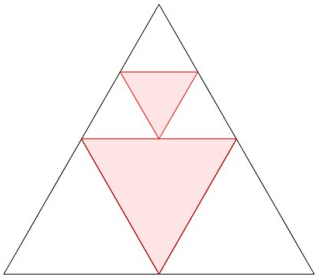


Un d'aquests triangles és una quarta part de la unitat. L'assenyalem-lo en vermell:



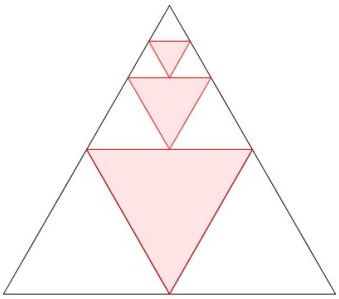
Ara prenem el triangle de la part superior (que, naturalment, també representa una quarta part) i el dividim de la mateixa manera en quatre parts iguals. Cada part representarà una quarta part d'una quarta part, per tant una setzena part. Una d'aquestes parts també la pintem de vermell:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$$



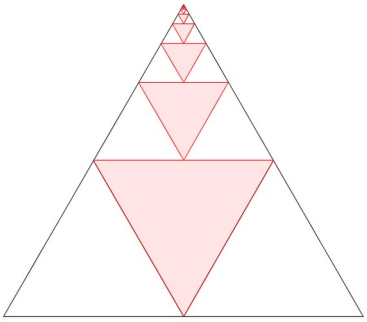
Novament prenem el triangle superior que representa una setzena part i el dividim, de la mateixa manera, en quatre parts iguals. Pintem en vermell una d'aquestes parts:

$$\frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$$

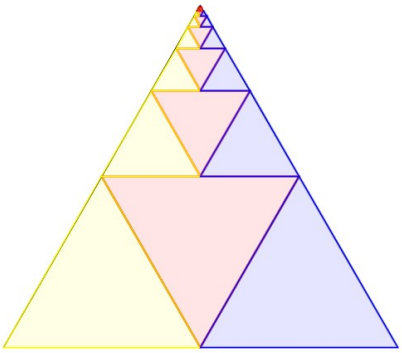


Si fem el mateix procés indefinidament obtindrem una cadena de triangles la suma de les àrees dels quals correspondrà a la suma d'infinits termes:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots$$



Si mirem aquest dibuix amb certa distància observarem que hi ha tres cadenes ascendents de triangles idèntics que hem pintat respectivament de groc, de vermell i de blau:

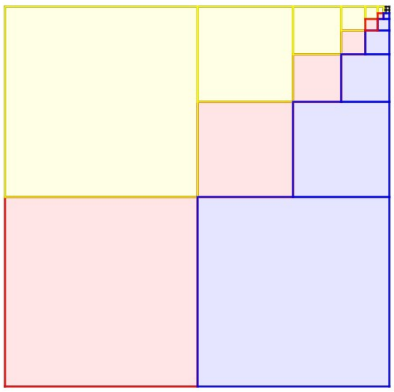


Així doncs el triangle unitat original queda dividit en tres parts iguals i la cadena de triangles vermells és una d'aquestes parts. Per tant la suma de les infinites àrees dels triangles vermells dóna tan sols una tercera part de la unitat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{14} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \ldots = \frac{1}{3}$$

A batxillerat podrem deduir el mateix per tècniques aritmètiques (suma de tots els termes d'una progressió geomètrica de raó més petita que 1), però serà menys intuïtiu!

Un raonament semblant es pot fer prenent com a unitat un quadrat i anant-lo dividint en quatre parts com mostra la figura:



Continguts més rellevants que es tracten:

Concepte de fracció i representació gràfica de fraccions com a parts de figures, producte de fraccions i el seu sentit geomètric, sumes infinites (a batxillerat, progressions geomètriques).

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Aquesta proposta permet treballar especialment la competència 4 de la dimensió de resolució de problemes (Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes), la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques), la competència 7 de la dimensió de connexions (Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar) i la competència 9 de la dimensió de comunicació i representació (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic).

Comentaris i referències:

Molt sovint, quan s'inicia o es repassa el tema de fraccions, s'insisteix en la representació gràfica de fraccions com a parts d'una figura. Curiosament, també sovint, aquesta representació ja no s'utilitza més. L'activitat que es presenta és un excel·lent exemple de les possibilitats que té la representació gràfica de fraccions per treballar aspectes aritmètics avançats.

Més enllà dels resultats numèrics concrets convé assaborir amb els alumnes la sorpresa que la suma d'infinits nombres positius no té per què ser infinit.

Aquesta idea i algunes altres de semblants està molt ben explicada en el llibre *Math made visual*, *Creating Images for Understanding Mathematics* de Claudi Alsina i Roger B. Nelsen.