Algunes activitats d'experimentació en el bloc d'espai i forma

Observacions generals

La geometria és una de les parts de la matemàtica més lligada a la percepció sensorial del món que ens envolta. El fet de viure inexorablement submergits en l'espai físic, ple de formes i d'imatges fa que la geometria sigui un dels territoris de l'educació matemàtica on hi ha més possibilitats de contextualitzar, de cultivar la intuïció i de proposar a l'alumnat experiències directes amb objectes i amb situacions de l'entorn.

La riquesa competencial de les activitats d'experimentació en geometria actualment es veu reforçada per l'ús de dos tipus d'eines que són complementàries: els materials manipulables i els programes de geometria dinàmica com el GeoGebra. Precisament l'itinerari de Formació Interna de Centre (FIC) *La geometria a l'educació secundària obligatòria* (http://www.xtec.cat/web/formacio/fecb/fic/itineraris/guiats/sec_geometria), en la fase de construcció i experimentació, dedica dos blocs respectivament a *Geometria amb material manipulable* i a *Geometria amb GeoGebra*. Aquest itinerari pot contribuir molt a impulsar avenços metodològics en el treball entorn als continguts geomètrics en els centres de secundària. La dinàmica de formació que planteja es basa en l'aportació d'idees i recursos per a la reflexió conjunta del professorat, en l'experimentació de propostes a l'aula i en l'adopció d'acords concrets. El detall de totes les seves activitats i materials pot consultar-se a l'enllaç: http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/fic/cma/cma04/index

En treballar el bloc d'Espai i forma és fonamental l'ús de materials manipulables. En el document *Orientacions per a la millora de l'aprenentatge de la geometria i la mesura* que va publicar la Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat del Departament d'Ensenyament el maig al 2012, respecte del material manipulable en geometria, s'afirma: *En el treball geomètric caldria donar força importància al plantejament de situacions en l'espai i a la manipulació de figures tridimensionals per superar les dificultats de visualització espacial, sense la qual el treball en dos dimensions no passa de ser una convenció mancada d'entitat real (..) Cadascuna d'aquestes activitats, que parteixen de la manipulació, ha d'encaminar-se cap a una anticipació de les experiències, cap a una visualització mental de les situacions que finalment permetin als alumnes d'aquest cicle poder conjecturar i solucionar problemàtiques senzilles sense la necessitat de l'ús previ de materials. Tot i això, aquesta visualització mental no s'ha d'entendre com una «superació» de la manipulació, sinó com una capacitat diferent que l'alumne desenvolupa; el treball manipulatiu haurà de continuar essent present en l'activitat matemàtica de l'alumnat en totes les etapes.*

La importància d'aquest tipus de materials en l'educació matemàtica es posa de manifest en abundants referències. En citem dues:

> Pere Puig Adam[1] afirma: *Aquest material (...) vist pels matemàtics situats des de l'elevada perspectiva abstracta, són meres concrecions il·lustradores, simple vestimenta convenient per facilitar momentàniament comprensions dificultoses; però per a l'educador matemàtic, que no perd la perspectiva dels processos inicials*

1 Puig Adam, P. *El material didáctico actual, presentado en la XI reunión de la Comisión Internacional para el Estudio y la Enseñanza Matemática y Exposición Internacional simultánea (Madrid, 21-27 de abril de 1957)*. Madrid: Publicaciones de la revista Enseñanza Media, 1958.

d'abstracció, aquest material és molt més: representa quelcom substancial amb la seva funció educativa. Aquest material, estructurat en forma de models, té no sols la funció de traduir ocasionalment idees matemàtiques, sinó també d'originar-les, de suggerir-les.

George Pólya[2], després de citar la frase de Kant *Tot coneixement humà comença amb intuïcions, continua amb concepcions, i finalitza amb idees* (I. Kant: *Crítica de la Raó Pura*), en proposa la següent lectura didàctica: *L'aprenentatge comença amb acció i percepció, continua amb paraules i conceptes, i ha de finalitzar amb hàbits mentals desitjables. (...) "acció i percepció" us ha de suggerir manipular i veure coses concretes com pedres, o pomes, o reglets Cuisenaire; o regle i compàs; o instruments en un laboratori.*

Aquestes afirmacions que es refereixen a l'educació matemàtica en general, encara són més aplicables, si és possible, en el camp de la geometria on el sentit del concret, de l'experimentació, de la vivència de la forma i de la transformació són més presents que en cap altra territori matemàtic. De l'experimentació en sorgeixen descobertes que es van perfilant en conceptes. Quan aquest procés es concreta en experiències escolars podríem distingir, tal com es destaca en la primera part d'aquest document, unes etapes que es posaran clarament de manifest en algunes de les propostes d'activitats geomètriques del quadre que es presentarà més endavant:

Experimentació: Els alumnes exploren situacions geomètriques (sigui manipulant objectes, sigui amb l'ús d'un programa de geometria dinàmica com GeoGebra, sigui dibuixant sobre paper...), produeixen canvis, fan comparacions, conjecturen i proven, temptegen... Això tan sols serà possible si el docent crea les condicions que aconsegueixin immergir l'alumne i el grup en un ambient de recerca.

Descoberta: A partir de l'experimentació els alumnes observen regularitats, patrons, relacions entre magnituds o entre figures. Probablement el docent haurà ajudat a conduir l'experimentació per tal que arribi a aquest punt, però la descoberta hauria de ser viscuda per l'alumne com una experiència personal.

Conceptuació: Cal perfilar bé la descoberta que s'ha fet. Serà bo, aprofitant la dimensió social de la classe, posar-la en comú, amb les paraules de cadascú i, conjuntament, aconseguir afinar-la i expressar-la de la manera més precisa possible. Ara la descoberta ja no és una idea individual sinó que ha esdevingut patrimoni del grup.

Demostració o formalització (si cal!): Encara que la regularitat observada experimentalment s'hagi acomplert en la pràctica de cada alumne, no passa de ser una conjectura que, en alguns casos, serà convenient tant de demostrar mitjançant un raonament lògic com de formalitzar per tal d'assegurar una expressió més precisa i concisa.

En alguns casos les activitats d'experimentació (amb materials, amb GeoGebra...) permeten abordar temes més avançats del previst, de manera natural, sense forçar la situació. A vegades

2 Pólya, G. "On Learning, Teaching and Learning Teaching". A: *American Mathematical Monthly*, 70, 1963, pàg. 605-619.

són els propis alumnes els qui van més enllà impulsats per la seva experimentació i la seva curiositat. No ens hauria de fer por avançar idees, el que ens ha de fer por és avançar formalitzacions. Una cosa són els conceptes i una altra és la vestimenta formal que posem a aquests conceptes. El rigor formal és important en cert nivell del treball matemàtic (indubtablement a batxillerat, per exemple) però la impossibilitat d'una fonamentació rigorosa no hauria de ser objecció per a la descoberta més fresca, vivencial, experimental d'idees matemàtiques la formalització o demostració de les quals, si cal, es farà posteriorment. Un exemple paradigmàtic d'això és el tema de les còniques. Actualment el treball amb còniques està contemplat a batxillerat. Sembla evident que tractar a l'ESO les equacions de les còniques, per a molts alumnes, seria realment prematur. Però cal reconèixer que certs aspectes de les el·lipses o de les paràboles (la definició com a llocs geomètrics, alguns mètodes de construcció, certes propietats focals, aplicacions...) es podrien "descobrir" a l'ESO a través d'experiències amb materials o de construccions amb eines TIC, per exemple.

Els programes de geometria dinàmica (i, en particular, el GeoGebra que és el més estès a casa nostra) han obert un amplíssim camp de possibilitats per a les activitats d'experimentació en l'ensenyament de la geometria. La facilitat de fer construccions geomètriques i la possibilitat de deformar els objectes, observant aspectes que canvien i patrons invariants, permet un treball tan potent pel que fa als continguts que es poden posar en joc com motivador pel que té d'atractiu i no excloent per a l'alumnat. La disponibilitat d'eines com el GeoGebra, en si mateixa, convida a canvis de fons en l'enfocament de tota la geometria escolar. Naturalment s'inclou en el quadre de propostes de l'apartat següent.

Tant els materials manipulables com les eines tecnològiques de les que actualment disposem poden ajudar a impulsar un enfocament més constructiu i contextualitzat de la geometria. Emma Castelnuovo, en el pròleg de l'edició catalana del seu llibre *La Geometria*[3], afirma: *Això és el que es proposa el text: no es tracta d'una imposició axiomàtica que no pot ser entesa entre els 11 i els 14 anys; no es tracta de fer aprendre definicions que sovint els semblen exigències absurdes i que es limiten, per tant, a paraules sense sentit apreses de memòria. El llibre, en canvi, es preocupa d'incitar als alumnes, a través dels problemes motivats per una dinàmica concreta i de les diverses qüestions de la realitat en què vivim, a construir ells mateixos la matemàtica amb l'ajut del professor (...) un ensenyament d'aquest tipus converteix les matemàtiques en una disciplina de les més engrescadores*.

Hi ha moltes activitats per fer a classe que responen a un enfocament més constructiu i reflexiu de la geometria, on hi ha lloc per a la creativitat, la imaginació, el descobriment, la curiositat... A continuació se citen dues webs que contenen excel·lents propostes:

- L'apartat *Geometria!* de la web del CESIRE CREAMAT (de fet el títol complet és *Impulsem la Geometria*). És especialment interessant el bloc *Proposta de la setmana* que presenta dinou activitats obertes en l'enfocament i potents en els continguts que es tracten. Malgrat que, en molts casos, estan enfocades per a primària són perfectament adaptables a secundària. Pot consultar-se en el següent enllaç: http://srvcnpbs.xtec.cat/creamat/joomla/index.php/impulsem-la-geometria.

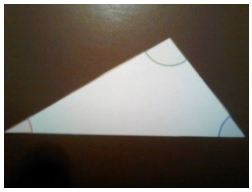
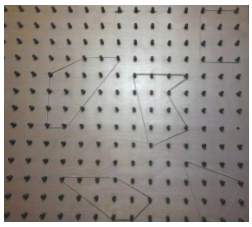
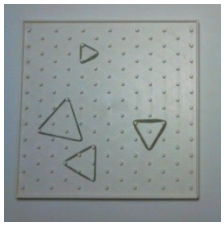
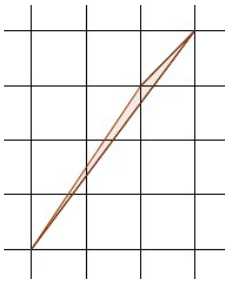
- La web *Illuminations* (illuminations.nctm.org) del NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*) que proporciona una bona quantitat tant del que anomenen "lliçons"

3 Castelnuovo, E. *La Geometria*. Ketres editora, 1981.

com d’applets interactius, classificats per etapes i per blocs. En particular hi ha moltes propostes de geometria.

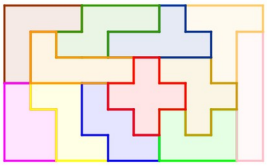
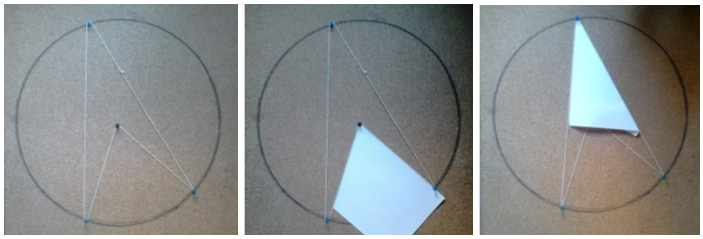
En el quadre de l’apartat següent es presenta una mostra d’activitats d’experimentació per desenvolupar en el bloc d’espai i forma. En el cas d’activitats que siguin especialment il·lustratives de les fases que abans s’han descrit (experimentació, descoberta, conceptuació i demostració o formalització, si cal), aquest fet s’indicarà en negreta dins de la columna de comentaris i referències. Algunes activitats es desenvolupen de manera més detallada en propostes a part.

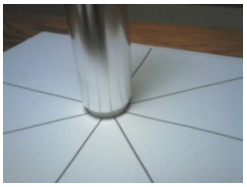
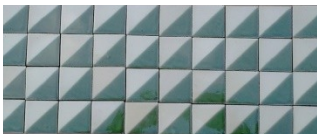
Quadre amb exemples d'activitats

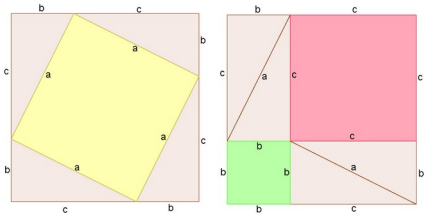
Activitat	**Comentaris i referències**
Sumem angles	 Aquesta activitat proposa un procés d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració** per determinar el valor de la suma d'angles d'un triangle, d'un quadrilàter i d'una estrella de cinc puntes. En cada cas es proposa experimentar tant retallant la figura en paper com fent les construccions amb GeoGebra. Un camí d'aquest tipus és competencialment molt ric, dóna més significat al resultat que *es descobreix* de manera directa i posa de manifest un model constructiu del coneixement matemàtic. L'activitat es detalla en la proposta que porta per títol *Sumem angles*.
Geoplans i geoespais	  Els geoplans quadrangulars (o les trames quadrangulars sobre paper) permeten moltes activitats: mesura de perímetres de figures, divisió de figures en parts que tinguin la mateixa àrea, mesura d'angles, mesura d'àrees comptant quadrats, treball amb coordenades (coordenades de punts, canvis de sistemes de referència, equacions de rectes)... També es poden plantejar petites recerques a partir de preguntes com ara *Podem construir un triangle equilàter?* o *Podem construir un triangle de 5 unitats de base que tingui menys d'una unitat quadrada de superfície?*. La resposta a la primera pregunta és negativa, la curiosa resposta a la segona es mostra a la figura adjunta.  És especialment bonica la descoberta de la fórmula de Pick (en honor al matemàtic austríac Georg Alexander Pick, 1859 - 1942): *Considerem un polígon sobre un geoplà quadrangular. Si I és el nombre de punts interiors i F el nombre de punts de la frontera*,

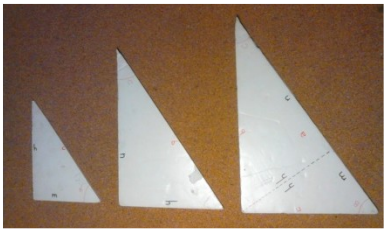
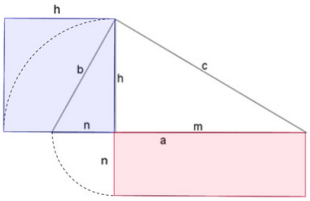
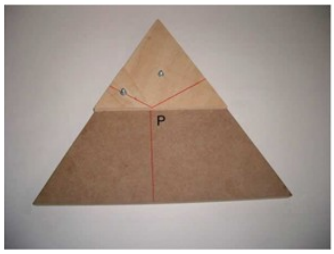
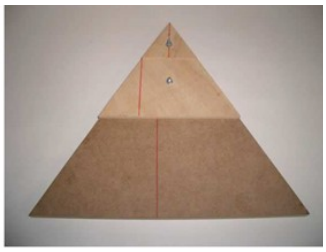
	llavors la seva àrea A es pot calcular amb la fórmula $A = I + \frac{F}{2} - 1$. Convidarem als alumnes a què experimentin amb diversos polígons anotant, en cada cas, el nombre de punts interiors, el nombre de punts de la frontera i l'àrea (mesurada comptant quadrats). Després hauran de descobrir (si cal, amb algun petit ajut) l'expressió que relaciona aquests tres valors. Ben segur que quedaran sorpresos! En aquest cas, no farem la demostració. Els geoplans isomètrics (o les trames isomètriques sobre paper) també permeten activitats interessants entorn a triangles i petites recerques (l'ARC conté propostes molt completes) però voldríem destacar la possibilitat que ofereixen aquestes trames per representar projeccions isomètriques de policubs senzills. El geoespai (imatge inicial de la dreta) és un recurs perfecte per mostrar posicions relatives de rectes a l'espai i superfícies reglades. A l'ARC hi ha diversos elements que tracten sobre geoplans alguns dels quals adjunten guions d'activitats. Per exemple *Geoplà* http://apliense.xtec.cat/arc/node/1276 o *Geoplà i trama isomètrica* http://apliense.xtec.cat/arc/node/29927.
Formes que fan pensar: trencaclosques, tangrams, pentòminos i hexòminos.	4 L'art de partir figures en trossos i reordenar-los per obtenir altres figures pot ser apassionant. Així els diferents tipus de tangrams i els nombrosos i elegants trencaclosques geomètrics de autors com Henry E. Dudenay, Sam Loyd o Martin Gardner han ofert delicioses hores de repte i reflexió a moltes persones. Aquests materials també són útils a l'escola. Els puzles geomètrics posen en joc tant l'enginy i la intuïció espacial com estratègies constructives més sistemàtiques que tenen en compte la comparació de longituds, l'equivalència d'àrees, les relacions entre angles... Amb un enorme poder motivador, els trencaclosques geomètrics tenen l'avantatge que ningú s'hi sent exclòs, que tothom hi pot fer coses i tenir èxit. En aquestes activitats és important que els alumnes expliquin les estratègies que han emprat i les raons per les quals han adoptat unes o altres decisions. En l'anàlisi que comporta l'explicació hi ha bona part de l'aprenentatge.

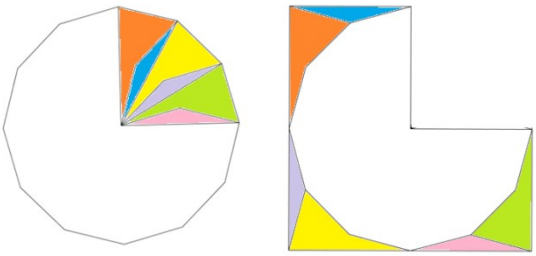
4 Fotografies de dos mòduls del MMACA (Museu de Matemàtiques de Catalunya).

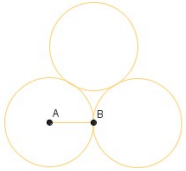
	Un material proper als trencaclosques geomètrics són els *pentòminos*, figures formades unint 5 quadrats iguals que tinguin almenys un costat en comú. Ens podem preguntar *Quants pentòminos hi ha?* Esbrinar la resposta ja genera una bona activitat de classe en la qual els alumnes fan propostes de pentòminos tot rebutjant aquelles figures que, per simetria, rotació o translació siguin superposables a altres ja considerades. Tan sols apareixeran 12 figures. Després, retallant les peces en cartró o emprant jocs de pentòminos de plàstic que es comercialitzen, ens podem plantejar un nou repte: *Amb els 12 pentòminos és possible construir un rectangle de 6x10 quadrats*. Es tracta d'una pràctica d'estratègia i domini de les formes planes. Hi ha més de mil solucions però no és fàcil trobar-ne una com la de la imatge:  Els *hexòminos* són les figures que resulten d'unir 6 quadrats. N'hi ha 35. Alguns d'ells poden ser el desenvolupament d'un cub. Un bon repte per a la classe és identificar quins poden ser-ho i quins no.
Relació entre un angle inscrit en una circumferència i l'angle central que abasta.	 Disposarem d'una placa de suro sobre la que hi ha dibuixada una circumferència, d'un fil elàstic nuat i de quatre xinxetes. Iniciarem l'activitat clavant una xinxeta en el centre de la circumferència i representant un angle inscrit mitjançant una xinxeta en el vèrtex i dues xinxetes sobre la circumferència. Amb el fil elàstic marcarem l'angle inscrit i després, tensant-lo, assenyalarem també l'angle central que abasta, tal com mostra la imatge de l'esquerra. Amb els alumnes ens preguntem si hi haurà alguna relació entre l'angle inscrit i el central. Podem fer mesures emprant un semicercle graduat i descobrirem que l'angle inscrit és la meitat del central. Potser ha estat una casualitat! Es pot convidar als alumnes a què facin els seus experiments dibuixant sobre paper circumferències amb angles inscrits i els seus angles centrals, mesurant-los i comparant-los. També es pot fer una comprovació més material: col·loquem un full de paper sobre l'angle central i el retallem per tal que marqui justament d'obertura (imatge central), després dobleguem el paper seguint la bisectriu de l'angle i el col·loquem sobre l'angle inscrit tot veient que s'hi ajusta perfectament (imatge de la dreta). Hem fet una descoberta que convé deixar ben escrita!

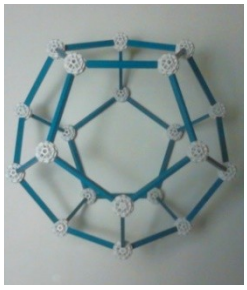
	Movent el vèrtex de l'angle inscrit sobre la circumferència i anant comprovant amb el paper doblegat observarem que tots els angles inscrits que corresponen al mateix angle central són iguals! Aquí serà bo fer una experimentació amb GeoGebra que anirà donant els valors dels dos angles mentre es va desplaçant el vèrtex. Podríem demostrar la propietat que hem descobert? Amb petites indicacions (com l'interès de traçar el segment que uneix el centre de la circumferència i el vèrtex de l'angle inscrit, per formar dos triangles isòsceles) la demostració pot ser feta pels propis alumnes. Així s'haurà realitzat un procés d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**. Com a conseqüència del que s'ha demostrat, tots els angles inscrits que abasten un angle central pla, són rectes (també se'n pot fer una comprovació experimental), la qual cosa suggereix una forma de construir triangles rectangles! Combinant aquesta idea amb el teorema de l'altura tindrem una bonica manera de construir gràficament nombres irracionals del tipus $\sqrt{n}$.
Miralls i simetries	 Els miralls són un recurs ple d'oportunitats didàctiques per a treballar la simetria. Ofereixen experiències, en general, motivadores i atractives visualment que poden ser molt útils per a provocar el raonament geomètric o enriquir-lo. En la proposta d'activitat que porta per títol *Miralls i simetries* es descriuen breument algunes d'aquestes possibilitats.
Quan les transformacions geomètriques que conserven les distàncies (isometries) es fan art: mosaics, sanefes i rosasses	 Els mosaics, les sanefes i les rosasses ofereixen excel·lents oportunitats per treballar a classe les translacions, les simetries i les rotacions. En aquestes figures la geometria, a través de la repetició d'un mateix motiu, esdevé una eina per crear bellesa. L'exploració de l'entramat geomètric que s'amaga darrera d'aquestes formes és

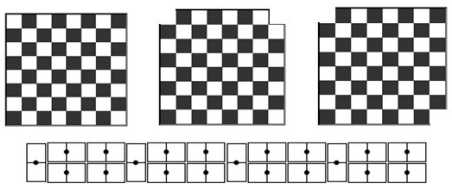
	una font d'activitats pràctiques per a la classe. Les tradicionals rajoles de cartabó (com les de les imatges) són un magnífic recurs per fer activitats d'experimentació a classe de geometria. A partir d'un motiu molt simple es pot crear un gran nombre de mosaics i sanefes en les quals és fàcil identificar les transformacions geomètriques implicades. Sorprèn l'abundància de possibilitats que ofereixen aquestes rajoles! També és una activitat molt rica crear enrajolats del pla a partir d'un primer mosaic bàsic (amb quadrats, amb triangles equilàters...), traient una figura en contacte amb una part d'un costat i afegint-la, exactament igual, a un altre costat. S'explica amb detall a la proposta de l'ARC *Mosaics dibuixant* (http://apliense.xtec.cat/arc/node/1291). Els mosaics de Penrose, construïts amb dues peces (estels i sagetes) que s'originen a partir de pentàgons, permeten igualment interessants activitats pràctiques com mostra l'element *Mosaics de Penrose amb peces magnètiques* de l'ARC (http://apliense.xtec.cat/arc/node/1292). Les sanefes també ofereixen la possibilitat de fer activitats d'experimentació amb isometries: creació de sanefes a partir de motius mínims i de transformacions donades i, viceversa, anàlisi d'una sanefa identificant del motiu que es repeteix i les transformacions geomètriques que la generen. Hi ha un magnífic treball de la professora Teresa Ticó sobre el possible ús didàctic de les sanefes de les façanes de Barcelona. Pot descarregar-se des de l'enllaç http://www.anycerda.org/web/arxiu-cerda/fitxa/activitats-matematiques/188 (la part de sanefes és a partir de la pàgina 34). Les rosasses que donen llum i adornen moltes esglésies són un bon recurs per tractar a classe els girs i les simetries. Entre les activitats que es poden fer entorn d'elles hi ha les següents: construir una petita col·lecció d'imatges de rosasses, identificar el motiu mínim que es repeteix, analitzar l'estructura geomètrica d'algunes rosasses i classificar-les, construir rosasses amb GeoGebra i fer un petit concurs de disseny...
Relacions mètriques en triangles rectangles (1): teorema de Pitàgores	 El treball entorn al teorema de Pitàgores és molt comú a l'ensenyament secundari. Tanmateix la proposta que es presenta té la particularitat de plantejar-ho seguint un procés en quatre etapes: **experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**. Això permet que l'alumne visqui en primera persona *la construcció del teorema* i que la seva comprensió sigui clara i rica. Aquesta activitat, que es descriu en detall en la proposta que porta per títol *Relacions mètriques en triangles rectangles (1): teorema de Pitàgores*, inclou

	una demostració amb materials tan senzilla com elegant.
Relacions mètriques en triangles rectangles (2): teoremes de l'altura i del catet	  Els teoremes de l'altura i del catet expressen tres relacions mètriques en triangles rectangles que són fàcils pel que fa a les idees que posen en joc i interessants especialment per la seva aplicació a la trigonometria. La proposta d'activitat que porta per títol *Relacions mètriques en triangles rectangles (2): teoremes de l'altura i del catet* descriu una manera d'introduir aquests resultats seguint un procés en quatre etapes (**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració)** que convida a una implicació activa dels alumnes.
Descobrim el teorema de Viviani	  El teorema de Viviani no està entre els continguts que es tracten en l'educació matemàtica malgrat expressar un resultat ben sorprenent que posa en joc elements senzills d'un triangle equilàter. Probablement això sigui degut a què, a diferència de teoremes com el de Pitàgores o el de Tales, no és imprescindible per fonamentar altres resultats i, per a un estudiant de secundària, té un limitat interès pràctic. Tanmateix té un innegable interès educatiu en oferir una excel·lent oportunitat per a què els alumnes facin un procés geomètricament ric d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**, manejant idees que es troben àmpliament al seu abast. En aquest procés rau l'interès educatiu més rellevant d'aquesta proposta. És important seguir el camí amb calma, submergint l'estudiant en un ambient de recerca, evitant de trencar el joc prematurament i permetent que assaboreixi, en primera persona, el gust de la descoberta realitzada. Aquesta experiència es descriu en detall en la proposta d'activitat que porta per títol *Descobrim el teorema de Viviani*.

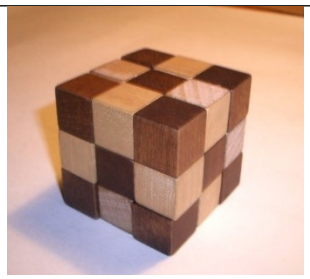
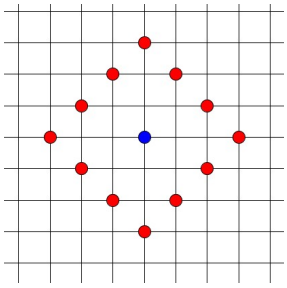
Explorem l'àrea del dodecàgon regular	 Malgrat ser una figura de fàcil construcció hem de reconèixer que el dodecàgon regular ha estat poc present a les classes de geometria. En aquesta activitat, seguint un procés d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**, intentarem trobar la sorprenent expressió de la seva àrea en funció del radi del cercle circumscrit. En el trajecte es treballaran aspectes geomètrics i també continguts referents a relacions funcionals. S'acabarà amb una bonica demostració visual. Es descriu amb detall en la proposta d'activitat que porta per títol *El secret del dodecàgon regular*.
Un sender de gran recorregut pel territori de les figures rodones	 Al llarg de l'ESO es van presentant conceptes referents a figures rodones i expressions per al càlcul d'alguns dels seus elements: longitud d'una circumferència, àrea d'un cercle, volum d'un cilindre, volum d'un con, volum d'una esfera, àrea d'una esfera... Però, donat que una demostració rigurosa d'aquestes fórmules requeriria eines que superen l'abast de l'ESO, sovint s'introdueixen sense cap recolzament argumental i això fa que perdin significat. Tanmateix, si bé no és possible fer demostracions d'aquestes fórmules, sí que es poden fer raonaments plausibles que mostrin intuïtivament la seva validesa. Presentar alguns d'aquests raonaments és l'objectiu del conjunt d'activitats descrites en la proposta que porta per títol *Un sender de gran recorregut pel territori de les figures rodones*. Es tracta d'un camí que no està pensat per fer-se tot seguit, sinó per estendre's al llarg de tota l'ESO. En tot cas la proposta planteja una manera conjunta d'abordar longituds, àrees i volums de figures rodones basada en l'experimentació i el raonament plausible. Quan la demostració rigurosa no és possible, aquest plantejament més intuïtiu és l'única alternativa a la simple memorització.

El GeoGebra	 En aquest recull de possibilitats de treball en geometria és imprescindible citar el GeoGebra, un programa de geometria dinàmica, creat per Markus Hohenwarter, àgil i intuïtiu, que pot ser una recurs molt potent a classe de geometria i d'altres parts de la matemàtica. La facilitat de fer i reproduir construccions geomètriques, la distinció entre els objectes inicials i els objectes resultants de les construccions, el treball simultani amb una finestra gràfica i una finestra algebraica (mai havia estat tan fàcil la visualització de la relació entre l'àlgebra i la geometria, enriquint-se una i altra!), la possibilitat de arrossegar punts i deformar figures per posar en evidència característiques invariats i aspectes que canvien, la possibilitat d'incorporar imatges reals i de fer construccions sobre elles, les eines de mesura (longituds, àrees, angles, pendents)... converteixen el GeoGebra en un espai d'experimentació, de descoberta, de comprensió, de raonament, de demostració que pot canviar profundament l'educació geomètrica. L'Associació Catalana del GeoGebra fa una feina extraordinària de difusió del programa, de creació de aplicacions i de formació del professorat. És recomanable una visita al seu web http://acgeogebra.cat/ i assistir a les jornades que anualment celebra. Precisament a les IV Jornades que es varen realitzar al febrer de 2012 el professor Mark Dawes de la Universitat de Cambridge va pronunciar una conferència que, sota el títol *GeoGebra – L'eina del professorat de matemàtiques*, donava molt bones idees sobre el seu ús a l'aula. Aquesta presentació i altres de les mateixes jornades poden consultar-se a http://acgeogebra.cat/iv_jornades.html.
Un poema de construccions geomètriques: *Euclid: The Game*	 *Euclid: The Game* és una mena de joc creat per Kasper Peulen sobre la versió de GeoGebra en línia, que consisteix en el plantejament successiu de construccions gràfiques amb regla i compàs. S'inicia l'aventura amb un menú d'eines molt petit i cal anar passant nivells,

	fent les construccions que es proposen. Cada vegada que es fa una construcció el programa entén que ja se sap fer i l'afegeix com una nova eina en el menú, de manera que podrà ser emprada per fer construccions posteriors. Així, de mica en mica, es va construint la geometria euclidiana. Tot un poema geomètric que es troba a l'enllaç: http://euclidthegame.com/ Un repte que convida als alumnes a viure la geometria euclidiana en estat pur, a construir un petit món a través del raonament gràfic, repte a repte, eina a eina. Tota una oportunitat per descobrir el sentit de la construcció progressiva del coneixement geomètric a partir d'uns *axiomes bàsics*.
Construcció i exploració de políedres	 Hi ha molts materials que permeten construir políedres fàcilment, mitjançant les cares o mitjançant les arestes. A part de materials comercials com el *Lokon*, el *Polydron* (aquests dos productes es componen de cares de diferents formes que es connecten i s'articulen fàcilment el que, en particular, permet estudiar els desenvolupaments plans de les figures), el *ZomeTool* (barres connectades per boletes amb encaixos específics segons els cossos) i el *Geomag* (estructures imantades que tenen l'avantatge de permetre deformacions), també es poden construir políedres amb làmines de plàstic transparent unides amb cinta adhesiva que permeten visualitzar l'interior i traçar línies sobre les cares, el que facilita, per exemple, l'estudi de les seccions (vegis la proposta de l'ARC http://apliense.xtec.cat/arc/node/1326). En políedres construïts a partir de les arestes també es poden visualitzar les seccions fent passar un fil una mica gruixut d'aresta a aresta tot marcant el perfil de la secció. Si aquests políedres estan construïts amb barretes de plàstic (com en el cas del *ZomeTool*) es podran submergir en aigua amb sabó i construir figures de gran bellesa formades per làmines líquides. Amb tubs de PVC i connectors fets amb trossos de mànegues de jardí també es poden construir políedres gegants. Algunes activitats permeten treballar el pas de l'espai al pla: a partir de políedres es poden obtenir figures planes fent ombres, desenvolupaments, vistes (planta, alçat, perfil) o seccions. Fins i tot es poden construir seqüències de seccions perpendiculars a un eix com si es tractés d'una tomografia axial (TAC) d'un políedre. També es pot treballar el pas invers, del pla a l'espai: deduir el políedre a

	partir de les seves vistes o de seqüències de seccions. Amb el títol *Cossos geomètrics*, l'ARC proposa un conjunt d'activitats en què, amb suport tecnològic i amb materials, es treballen prismes, piràmides, políedres regulars i també cossos de revolució (http://apliense.xtec.cat/arc/node/1166). El món dels políedres és molt ric en possibilitats d'ús de recursos manipulables tan atractius per als alumnes com potents en les facilitats de visualització i d'experimentació que ofereixen.
Fotografia matemàtica	[5] El professor Santi Vilches afirma que *la fotografia matemàtica és una eina didàctica*. Efectivament és una activitat molt potent per educar la mirada matemàtica dels alumnes i per contribuir a què vegin la matemàtica que els envolta. Si bé es tracta d'una activitat que pot relacionar-se amb qualsevol dels blocs de continguts matemàtics de l'ESO, és especialment rellevant per posar en joc continguts geomètrics degut al seu clar aspecte visual i al fet que la geometria és la part de les matemàtiques que té una presència més directa i evident en el nostre entorn quotidià. En la proposta que porta per títol *Fotografia matemàtica* es descriu amb més detall aquesta activitat.
Escacs i dominó	 Les demostracions de no existència no són gens comunes en l'educació matemàtica a secundària i, encara menys, en l'àmbit de la geometria. Aquesta activitat ens apropa a una d'aquestes demostracions a través d'un raonament geomètric fàcil, accessible a tot l'alumnat. L'activitat es descriu en detall a la proposta que porta per títol *Enrajolem un taulell d'escacs amb dominós*. Es parteix d'un procés d'experimentació amb materials que, de mica en mica, va conduint a descobrir la impossibilitat de l'enrajolament i a poder argumentar-ne les raons.
El cub i el tèrmit	

5 Fotografia de Halima Rachidi (Ins. J. Comas i Solà de Barcelona) presentada al concurs de fotografia matemàtica.

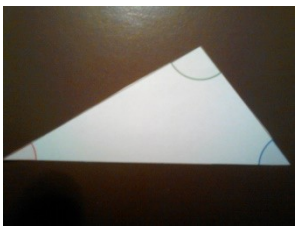
	 Hi ha materials manipulables que serveixen per treballar la resolució de problemes: alguns poden ser la base per plantejar un problema, altres poden ajudar a la seva comprensió i resolució. L'activitat que es descriu en la proposta que porta per títol *El camí del tèrmit* presenta un bonic exemple d'aquest segon tipus de material. Alhora que mostra la potència que pot tenir l'ús d'un recurs manipulable per enfocar i resoldre un problema, en principi, no pas gens fàcil, s'exposa un cas interessant de demostració de no existència en l'àmbit de la geometria.
Camins per una quadrícula: la geometria del taxista	 L'Eixample de Barcelona està format per una quadrícula de carrers que es tallen perpendicularment. En aquest espai no és possible anar d'un punt a un altre en línia recta ja que es travessarien blocs de cases, de manera que la geometria de l'Eixample respon a unes regles que no són les de la geometria d'Euclides i que donen lloc a l'anomenada *Geometria del taxista* o *Taxigeometria*. Per definir una geometria ens cal un conjunt de punts i una distància. Sobre un pla quadriculat definim la geometria del taxista de la següent manera: **Punts**: Les interseccions de la quadrícula. **Distància entre dos punt**s: El nombre de trams que formen el camí més curt entre els punts. A diferència de la geometria euclidiana, el conjunt de punts de la *taxigeometria* és discret, les distàncies entre ells són enteres i el camí més curt que uneix dos punts no té per què ser únic. Es tracta d'un món diferent, amb una geometria no euclidiana però senzilla, que ofereix moltes possibilitats de reflexió i raonament a classe. És interessant disposar d'un taulell de suro quadriculat i d'abundants xinxetes de dos o tres colors per marcar-hi punts. A partir d'aquí els alumnes poden anar experimentant i descobrint aspectes sorprenents d'aquesta geometria:

	- Assenyalar camins mínims que uneixen dos punts. - Determinar distàncies entre punts. - Donats dos punts, trobar punts equidistants. En aquesta geometria seria fer la *mediatriu* dels dos punts. - Donat un punt, assenyalar tots els punts que es troben a distància 3 d'aquest punt. Seria fer la *circumferència* de centre el punt donat i radi 3. Així ens endinsem en una geometria diferent de l'euclidiana que té un fonament senzill i sòlid (de fet la *taxidistància* correspon a la norma L_1) i que permet raonaments tan formatius en les idees que posen en joc com sorprenents en els resultats.

Proposta d'activitat

Títol: Sumem angles

Imatge:



Agrupament:

Es pot treballar individualment o per parelles. En el dos casos, després d'experimentar, caldrà posar en comú les regularitats observades. La demostració del tercer cas es farà conjuntament tot el grup.

Material:

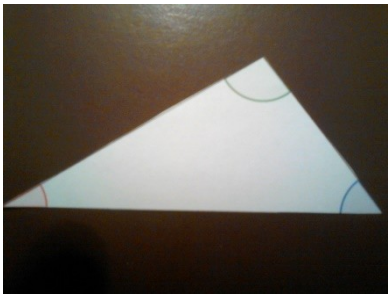
Estris de dibuix i estisores. També s'usarà el GeoGebra.

Descripció:

La proposta té tres parts:

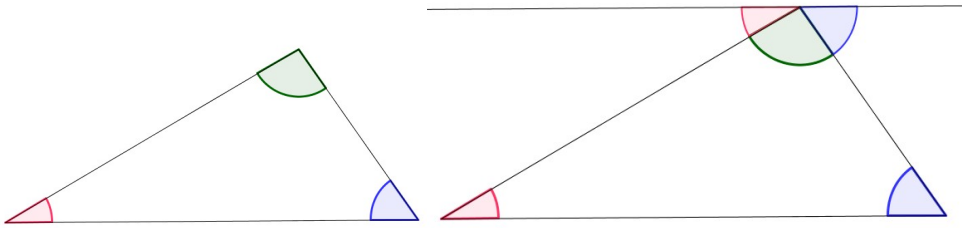
<u>1a part</u>

Es demanarà als alumnes que dibuixin un triangle en un full de paper, que el retallin i que assenyalin els tres angles en color. Així tindrem tot un conjunt de triangles diferents. Després demanarem que trenquin cada angle (millor esquinçar-lo que tallar-lo ja que la irregularitat del contorn de tall fa que l'únic angle que queda ben definit en cada peça sigui el del triangle original) i que ajuntin els tres angles obtinguts.



Malgrat que cada alumne haurà dibuixat un triangle diferent tothom observarà que, en ajuntar els tres angles, s'obté un angle pla. Així haurem descobert que la suma dels tres angles d'un triangle val 180°. Per tal de perfilar el concepte serà bo que posem en comú la descoberta i que l'expressem en una breu frase que quedi a la pissarra o en els quaderns.

Després, per acabar de consolidar la propietat observada, experimentarem amb GeoGebra canviant el triangle i observant que la suma dels tres angles sempre és de 180°. Acabarem aquest camí fent la demostració gràfica (vegis la imatge) que dóna categoria de propietat a la nostra conjectura.

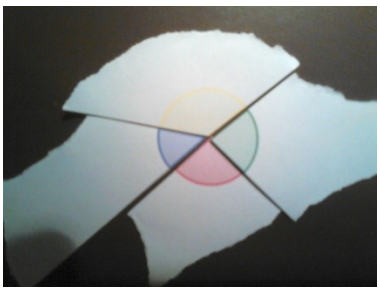


Observis el procés que s'ha seguit d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**. A vegades les propietats matemàtiques s'enuncien i es demostren tot seguit. En aquest cas l'ordre és ben diferent: l'alumne primer experimenta i descobreix personalment la propietat, la entén i l'expressa amb precisió i tan sols després es fa la demostració com una necessitat natural per donar-hi validesa general.

Aquesta activitat pot complementar-se amb una reflexió sobre el fet que la propietat deduïda tan sols és vàlida per a triangles plans però que no ho és per a triangles sobre l'esfera. N'hi prou en dibuixar un triangle com el de la imatge sobre una pilota i observar que presenta tres angles rectes de manera que la suma dels seus angles val 270°.

2a part

Ara es demanarà als alumnes que dibuixin un quadrilàter en un full de paper, que el retallin i que assenyalin clarament els angles. Després demanarem que separin cada angle i que col·loquin de manera consecutiva els quatre angles obtinguts. Descobriran que, en qualsevol dels quadrilàters que han retallat els alumnes, la suma dels quatre angles val 360°.

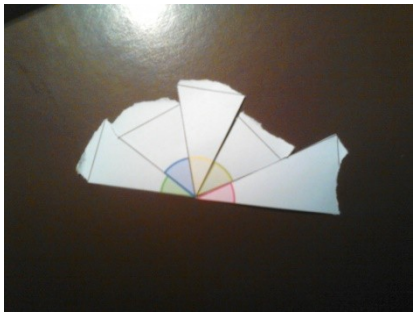


Novament es pot experimentar amb GeoGebra per veure si aquesta propietat és manté invariant en anar variant el quadrilàter. Això ens fa pensar que pot ser una conjectura plausible el que els angles de qualsevol quadrilàter sumen 360°.

En aquest cas podem convidar als alumnes a trobar una demostració. N'hi haurà prou en dividir el quadrilàter en dos triangles i aplicar el fet que la suma d'angles d'un dels triangles val 180°, com acabem de deduir.

3a part

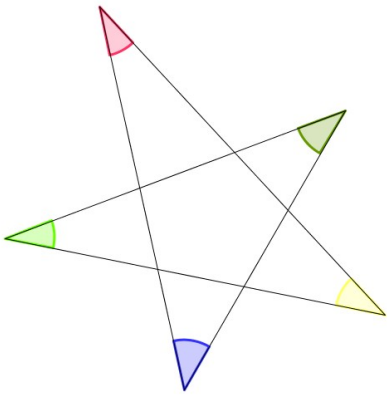
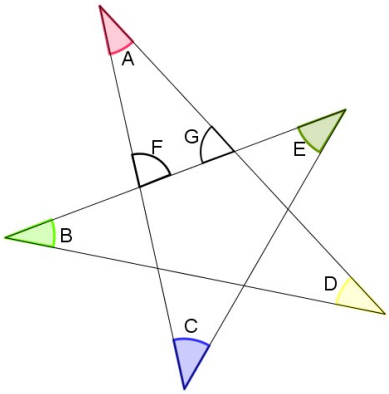
Ara demanarem als alumnes que, amb el regle, dibuixin una estrella de cinc puntes com la de la imatge, assenyalin els angles de les cinc puntes de l'estrella i aventurin una conjectura sobre la seva suma. Després els convidarem a retallar l'estrella i, com en els casos anteriors, col·locar els angles de manera consecutiva. Observaran (probablement amb certa sorpresa) que, per a les diferents estrelles que han dibuixat i retallat, la suma dels angles sempre serà de 180°. Ho havíem conjecturat al principi?



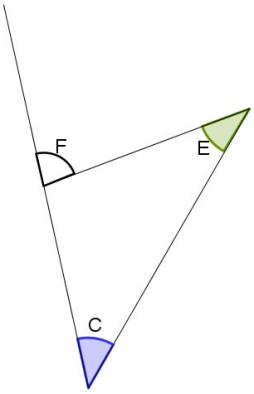
Emprant el GeoGebra podrem comprovar que aquesta propietat es manté en canviar l'estrella com es vulgui. És el moment de perfilar bé el que s'acaba de descobrir expressant-ho amb una frase consensuada. Novament hem fet un trajecte d'experimentació, descoberta i conceptuació, observant una regularitat que està pendent de demostrar.

En aquest cas la demostració és especialment elegant. Malgrat que no fa servir idees gens complicades té un punt d'artificialitat que fa difícil que pugui ser ideada del tot pels alumnes. Tanmateix, si el professor va guiant el procés, podran anar participant en la demostració sense problemes i fins i tot anticipar alguns passos.

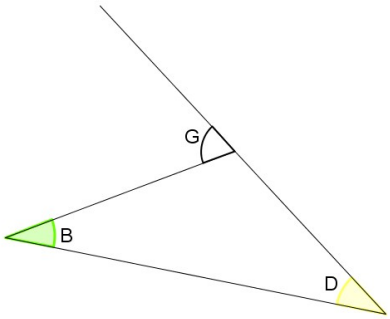
Partim de l'estrella de cinc puntes i assenyalem els angles A, B, C, D i E de les puntes. També assenyalem els angles F i G que es mostren en la figura.

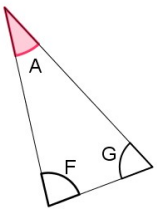
Observant tan sols el triangle de la figura següent deduirem que F = E + C (ja que els tres angles del triangle sumen 180° i l'angle F més l'angle del triangle que no està assenyalat també suma 180°):



Atenent ara tan sols al triangle de la figura que segueix, per la mateixa raó, deduirem que G = B + D.



Finalment posem la nostra atenció en una altra part de l'estrella, el triangle:



Atès que la suma d'angles d'un triangle és 180° tindrem:

$$180^o = A + F + G = A + (E + C) + (B + D) = A + B + C + D + E$$

El que volíem demostrar!

Continguts més rellevants que es tracten:

Triangles i quadrilàters. Angles interiors. Suma d'angles d'un triangle i d'un quadrilàter. Suma d'angles d'una estrella pentagonal. Construccions geomètriques amb GeoGebra. Raonament geomètric.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Aquesta proposta d'activitat pot contribuir a treballar la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques) així com la competència 11 de la dimensió de comunicació i representació (Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques). En cas d'emprar el GeoGebra també es cultivarà la competència 12 de la dimensió de comunicació i representació (Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics).

Comentaris i referències:

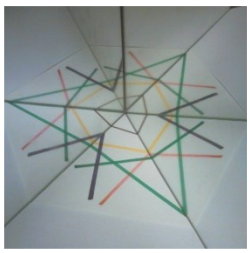
Observis que cadascuna de les tres parts d'aquesta proposta segueix un procés d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**. Un camí d'aquest tipus és competencialment molt ric, dóna més significat al resultat que *es descobreix* de manera directa i posa de manifest un model constructiu del coneixement matemàtic. També subratlla la importància de distingir entre conjectura, procedent de l'experimentació, i propietat demostrada tot donant valor tant al procés d'experimentar per descobrir regularitats com al procés de demostrar per atorgar-hi generalitat.

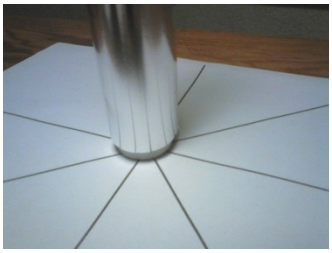
Es poden consultar també les propostes de l'ARC *Suma dels angles interiors d'un triangle* (http://apliense.xtec.cat/arc/node/950) i *Suma dels angles interiors d'un quadrilàter* (http://apliense.xtec.cat/arc/node/951).

Proposta d'activitat

Títol: Miralls i simetries

Imatge:





Agrupament:

Les diverses activitats que componen aquesta proposta es poden fer conjuntament tot el grup classe, donant un paper actiu als alumnes per experimentar directament amb els materials, per argumentar, per modificar els experiments...

Material:

Un mirall per dibuixar el contorn de la cara i un retolador no permanent. Un llibre de miralls, trossos de cartolina o peces per posar-hi i un semicercle graduat per mesurar l'angle d'obertura. Plantilles que, reflectides en un mirall, poden donar diferents imatges. Miralls per posar en paral·lel. Calidoscopis gegants: grups de tres o més miralls units formant les cares d'un prisma (amb el mirall a la part interior) per situar sobre una superfície plana i figures geomètriques de paper o de plàstic per posar en el seu interior. Un mirall cilíndric que es pot fer amb un rotllo de paper d'alumini. Els miralls de vidre tenen el risc de tallar o trencar-se. Existeix un material metàl·lic, reflectant com el vidre, que té l'avantatge de no trencar-se ni tallar, però es ratlla amb facilitat.

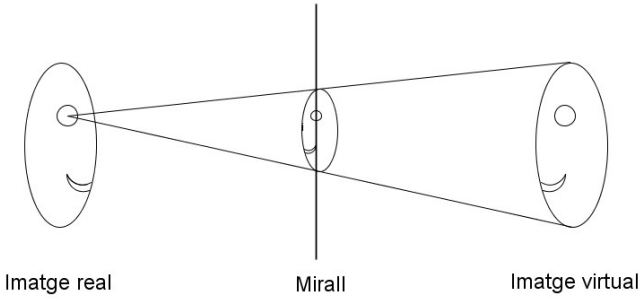
Descripció:

Els miralls són un recurs amb enormes possibilitats didàctiques atractives visualment i motivadores per a l'alumnat. Són un material bàsic per a treballar la simetria, provocant o enriquint el raonament geomètric. Tot seguit es fa un petit recull de possibles activitats amb breus descripcions.

Mirallet, mirallet... per què m'has fet tan petitet?

Portem un mirall a classe i proposem a un alumne que dibuixi (a grans trets) el contorn de la seva cara. D'entrada observarà que no és fàcil de fer amb els dos ulls oberts per què les imatges que capten els ulls són diferents (una bona oportunitat per parlar de la paral·laxi o de la producció d'imatges que simulen tres dimensions). Demanarem que faci el dibuix mirant amb un sol ull. Un cop fet s'observarà amb sorpresa que el perfil que hi ha sobre el mirall és molt més petit que la cara de l'alumne. Què ha passat? Si ens separem del mirall observarem que la cara continua ajustant-se perfectament al perfil dibuixat. Com és possible?

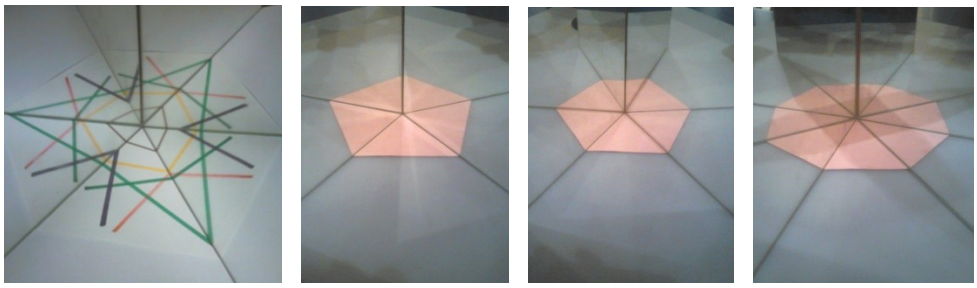
L'explicació és una magnífica aplicació del teorema de Tales (vegis la imatge següent) que demostra que les dimensions lineals de la representació sobre el mirall són la meitat de les de la figura real i les àrees són la quarta part!



Aquesta activitat està explicada amb detall en l'element de l'ARC *Mirallet, mirallet, per què m'has fet tan petitet?* (http://apliense.xtec.cat/arc/node/1269)

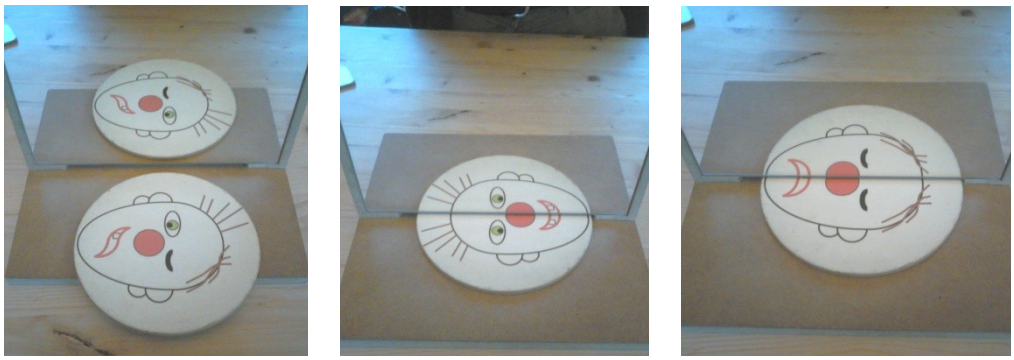
Llibres de miralls: Boniques imatges virtuals

Un llibre de miralls està format per dos miralls rectangulars units amb cinta adhesiva per un costat de manera que es pugui articular canviant l'angle diedre que formen. És bo que, en la base de l'espai obert entre els mirall, hi hagi un semicercle graduat per conèixer l'angle d'obertura. Posant en aquest espai dibuixos o peces mòbils s'obtindran imatges molt boniques com a resultat de successives simetries entre els dos miralls. L'atractiu d'aquestes imatges convida a fer-hi una anàlisi a partir de les simetries que es posen en joc i a fer preguntes convidant a anticipar imatges. Com es veu en les fotografies següents també es poden construir polígons regulars obrint els miralls un angle igual a l'angle central del polígon corresponent.



Generació d'imatges amb miralls i plantilles.

La màgia de la simetria es posa de manifest en una experiència com la que es veu en les tres fotografies següents (que corresponen a un mòdul del Museu de Matemàtiques de Catalunya, MMACA): una mateixa plantilla que, sobre un mirall, dóna imatges ben diferents.

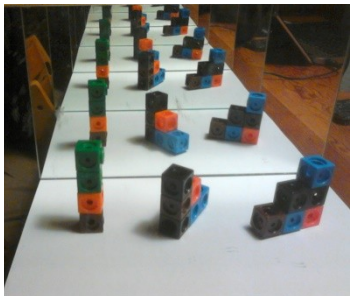


Es pot convidar als alumnes a crear plantilles com aquestes i mostrar-les després a tot el grup amb l'ajut d'un mirall.

Aquí es pot demanar de determinar eixos de simetria en les lletres majúscules de l'alfabet i fer comprovacions amb un mirallet. L'activitat es pot acabar amb un apunt sobre l'escriptura especular de Leonardo da Vinci.

Miralls en paral·lel

Col·locant dos miralls en paral·lel es produeix una composició infinita de simetries. És un recurs fàcil de portar a classe i interessant per analitzar com es van succeint les imatges, mostrant alternativament un costat dels objectes i l'altre. Movent lleugerament l'angle horitzontal o vertical d'un dels miralls s'aconseguirà que la filera d'imatges es mogui en un sentit o l'altre.



De fet aquesta és la situació que, a vegades, es produeix en els ascensors que tenen dos miralls enfrontats.

Els calidoscopis

Amb tres o més miralls units poden formar-se calidoscopis gegants. Posant figures en el seu interior es podran contemplar imatges molt boniques. És interessant aturar-se a reflexionar sobre la geometria d'aquests mosaics virtuals creats mitjançant la successiva composició de simetries. I també és interessant fer el procés invers: donat un mosaic trobar la peça i el calidoscopi que permeten generar-lo. Transitar per aquests sorprenents camins de la peça al mosaic i del mosaic a la peça és el repte que ofereix l'esplèndid mòdul del MMACA que apareix en la fotografia de l'esquerra. La imatge de la dreta mostra un d'aquests sorprenents paisatges creats per la simetria.

Políedres virtuals

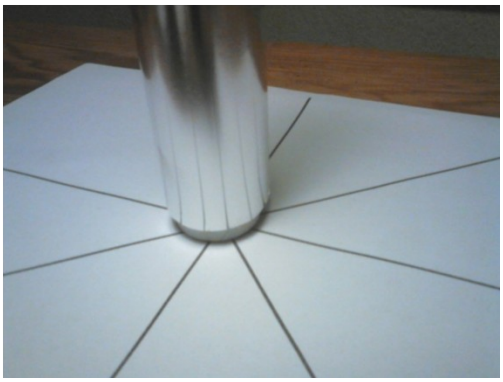
En alguns casos combinacions adequades de miralls permeten construir políedres virtuals a partir d'unes poques peces elementals. El MMACA té una esplèndida col·lecció d'aquest tipus de mòduls que conviden a experimentar posant peces diverses i interpretant el resultat que s'obté. Un exemple és el que es mostra en la imatge següent.

Amb tres o més miralls units formant les cares d'un tronc de piràmide i amb angles díedres de mesures adequades es poden visualitzar els cinc políedres regulars:

És interessant fer observar als alumnes la importància que tenen els angles diedres en aquestes construccions. Segons l'angle la imatge quedarà més oberta o més tancada o es reproduirà un nombre determinat de vegades.

Miralls cilíndrics

Amb un cilindre de paper d'alumini es poden fer deformacions anamòrfiques d'imatges. Així, per exemple, és bonic observar amb els alumnes com se reflecteixen rectes que, en el pla són paral·leles, o investigar com han de ser les rectes del pla per tal que sobre el cilindre apareguin com a paral·leles, tal com mostra la imatge següent.



Continguts més rellevants que es tracten:

Simetria, eixos de simetria. Polígons. Angles plans i angles diedres. Teorema de Tales. Políedres regulars. Raonament geomètric.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Aquestes activitats conviden a fer-se preguntes i a argumentar entorn als efectes visuals que s'observen. Des d'aquesta perspectiva contribueixen a desenvolupar la competència 4 de la dimensió de resolució de problemes (Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes) i la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques).

Comentaris i referències:

A vegades els recursos que s'utilitzen per treballar una idea a classe són tan rics que conviden a explorar altres territoris matemàtics. Això passa amb alguns d'aquests recursos, per exemple el que s'ha anomenat *Mirallet, mirallet... per què m'has fet tan petitet?* El seu propòsit inicial és presentar una aplicació del teorema de Tales però permet descobrir la paral·laxi o apuntar aplicacions com les referents a tècniques per crear imatges en tres dimensions.

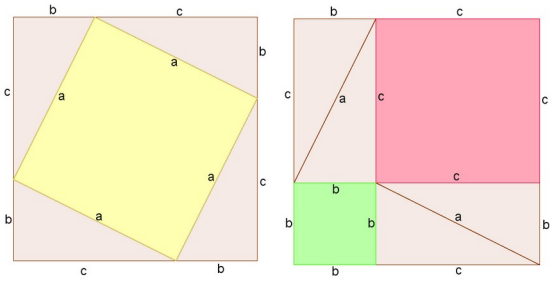
La majoria d'aquests recursos tenen un notable atractiu visual. Tanmateix, a classe, és important anar més enllà i convertir-los amb objectes d'experimentació que, interactuant amb ells, convidin a la reflexió i al raonament geomètric.

El Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) té, entre altres mòduls, una magnífica col·lecció de recursos associats als miralls. Mereixen una visita!

Proposta d'activitat

Títol: Relacions mètriques en triangles rectangles (1): teorema de Pitàgores

Imatge:



Agrupament:

La part d'experimentació, descoberta i conceptuació sembla adequat fer-la individualment. Si s'empra el GeoGebra podem treballar per parelles. La demostració es farà conjuntament.

Material:

Si es vol fer la demostració amb material tan sols caldrà disposar de quatre triangles rectangles idèntics retallats en cartró i amb la hipotenusa i els catets retolats.

Descripció:

El treball entorn al teorema de Pitàgores és molt comú a l'ensenyament secundari. Tanmateix la proposta que es presenta té la particularitat de plantejar-se seguint un procés en quatre etapes: **experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**. Es descriuen tot seguit.

<u>Experimentació</u>

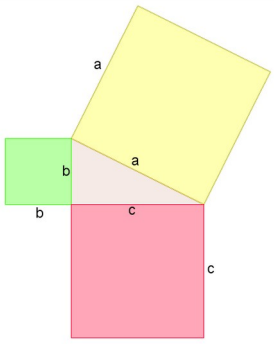
Cada alumne dibuixa un triangle rectangle gran en un full (el triangle rectangle que vulgui). Tothom amida la hipotenusa (que anomenem a) i els catets (que anomenem b i c) i apunta les mesures. Es demana que elevin al quadrat els valors obtinguts per a, b i c i es pregunta si s'observa alguna relació entre els nombres obtinguts.

Descoberta

Després de diversos temptejos els alumnes se n'adonen que sumant els valors obtinguts a l'elevar al quadrat els catets dóna el valor obtingut a l'elevar al quadrat la hipotenusa! I això passa amb tots els triangles rectangles que han dibuixat.
Acabem de descobrir una possible regularitat!
Podem comprovar-la en més cassos, especialment si fem servir el GeoGebra.

Conceptuació

Ara intentarem expressar, de manera clara i concisa, la propietat observada.
Posem en comú els enunciats elaborats per diferents alumnes i convenim un enunciat que creguem que descriu bé la propietat que hem «descobert».
Ens n'adonem que, en el fons, estem expressant una igualtat entre àrees de quadrats (l'àrea del quadrat groc és igual a la suma de les àrees dels quadrats vermell i verd):

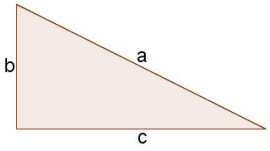


Fins i tot podem construir un nou enunciat de la propietat descoberta en termes d'àrees de quadrats.
Procurem que quedi constància escrita del que hem fet i de la nostra «descoberta».

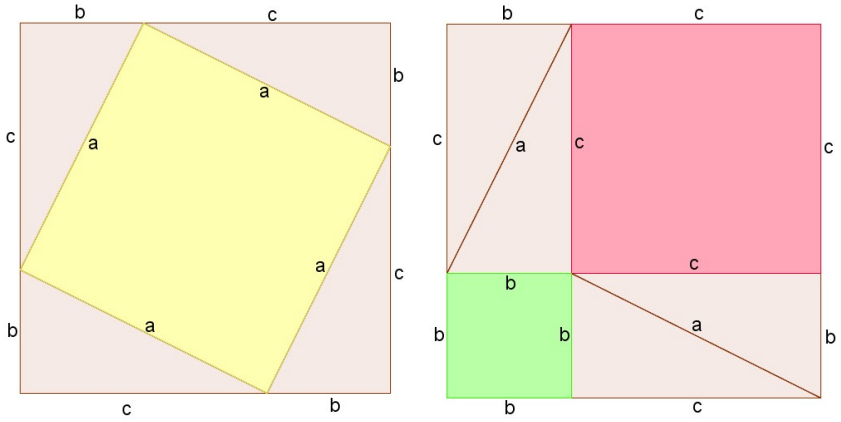
Demostració

Fem constar que, malgrat que la propietat observada s'hagi acomplert per a tots els nostres triangles, encara no deixa de ser una conjectura. Ens caldrà demostrar-la!
Hi ha moltes demostracions boniques del teorema de Pitàgores. Algunes d'absolutament visuals com la següent.

Partim del triangle rectangle:



I el dibuixem quatre vegades formant dues configuracions diferents:



En els dos casos apareix un quadrat gran de costat b+c que conté els quatre triangles i una part fora dels triangles. En el primer cas aquesta part és un quadrat (groc) d'àrea a^2 i en el segon cas són dos quadrats (verd i vermell) d'àrees b^2 i c^2. Aquestes dues àrees lògicament han de ser iguals. Així queda demostrat que $a^2=b^2+c^2$.

El més interessant és fer aquesta demostració amb peces mòbils (sembla com si la constància de l'àrea sigui "més sòlida"):

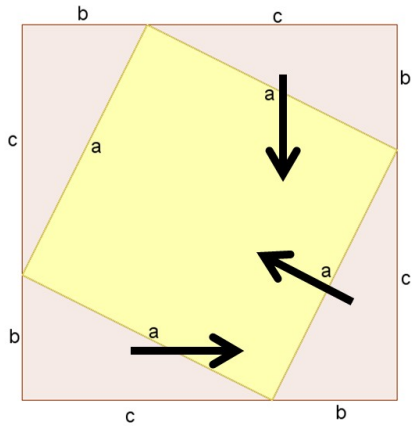
Retallar en cartró quatre triangles rectangles idèntics i escriure a, b i c sobre la hipotenusa i els catets respectivament.

Col·locar-los en la primera configuració (part esquerra de la figura anterior).

Marcar el quadrat exterior que formen (així, en passar a la segona configuració, continuarà quedant ben clar el límit del quadrat gran). Això es pot fer assenyalant-ho amb guix o apropant-hi la bora de fulls grans de paper.

Observar que, en aquesta configuració la part del quadrat gran que queda per cobrir té una àrea de a^2.

Desplaçar els triangles fins a obtenir la segona configuració (part dreta de la figura anterior). El més elegant és fer-ho sense aixecar els triangles, fent-los lliscar en el sentit que indiquen les fletxes. És com si com menor sigui el moviment que fem amb els triangles més evident es fa el principi de conservació de les àrees que està en el fons de la demostració.



Observar que en aquesta segona configuració la part del quadrat gran que queda per cobrir està formada per dos quadrats d'àrees respectives b^2 i c^2.

Comparant les dues configuracions queda clar que $a^2=b^2+c^2$.

Continguts més rellevants que es tracten:

Triangles rectangles, hipotenusa i catets. Teorema de Pitàgores. Raonament geomètric.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Aquesta proposta permet treballar especialment la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques). La doble perspectiva que es pot donar del teorema de Pitàgores (com una relació mètrica entre les longituds dels costats d'un triangle rectangle o com una relació entre les àrees dels tres quadrats que es poden dibuixar sobre els seus costats) ofereix moltes oportunitats de raonament matemàtic (tal com es posa de manifest en alguns dels mòduls del MMACA) i és un exemple perfecte del que expressa la competència 9 de la dimensió de comunicació i representació (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic).

Comentaris i referències:

És molt aconsellable fer la demostració amb materials. És elegant i pràcticament no cal escriure res. Idees geomètriques en estat pur!

De fet el teorema de Pitàgores té moltes demostracions. En el Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) hi ha magnífiques demostracions i comprovacions. Algunes consisteixen en particions i reconstruccions de quadrats per

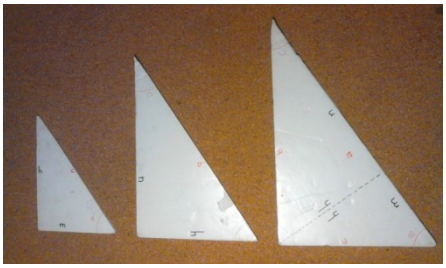
constatar la igualtat d'àrees i, fins i tot, n'hi ha que es fan amb balances comparant els pesos de peces.

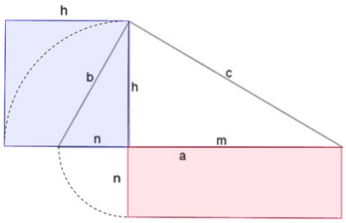
El teorema de Pitàgores és un resultat fonamental que convé construir sòlidament. És important cuidar el procés que se segueix per introduir-lo. La proposta que es presenta, en quatre etapes (**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**), pretén que la construcció del teorema es visqui en primera persona i que la seva comprensió sigui més rica.

Proposta d'activitat

Títol: Relacions mètriques en triangles rectangles (2): teoremes de l'altura i del catet

Imatge:





Agrupament:

La part d'experimentació, descoberta i conceptuació es pot fer individualment o per parelles. La demostració final serà més conduïda pel professor i es farà conjuntament.

Material:

Regle graduat, compàs, escaire i estisores. Per a la demostració caldrà disposar de triangles rectangles retallats en cartró o en cartró ploma (per tal que el perfil sigui una mica més ample i es vegi millor). Es tracta de tres triangles rectangles: el primer convé que sigui gran i es pot escollir lliurament, els altres dos són els que s'obtenen quan es divideix el primer per l'altura que cau sobre la seva hipotenusa.

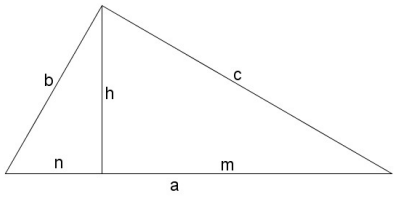
Descripció:

Els teoremes de l'altura i dels catets expressen tres relacions mètriques en triangles rectangles que són fàcils en la seva expressió i interessants en la seva aplicació a la trigonometria. Aquesta proposta d'activitat presenta una manera d'introduir-los seguint un procés d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració** que aconsegueix la implicació directa de l'alumne. Es descriu a continuació.

<u>Experimentació</u>

Demanarem que cada alumne o cada parella d'alumnes dibuixi un triangle rectangle en un paper. La manera més senzilla és aprofitar que els costats d'un full DIN A4 són perpendiculars, traçar una línia recta que uneixi dos punts en costats consecutius del full i prendre com a triangle rectangle el format per

aquests punts i el vèrtex del full. Després demanarem que es traci acuradament (amb regle i compàs o amb l'escaire) l'altura que cau des de l'angle recte a la hipotenusa. Tot seguit convidarem als alumes a posar nom als diferents elements que apareixen en la figura fent notar que, si després volem comparar mesures, ens serà més fàcil si tothom utilitza la mateix notació. Proposem que la hipotenusa sigui a i els catets b i c, que l'altura sigui h i que les dues parts en què l'altura divideix a la hipotenusa siguin m i n. En concret, que m sigui la projecció del catet c sobre la hipotenusa i n la projecció del catet b sobre la hipotenusa. Es representa en la figura següent.



A continuació es convida als alumnes a mesurar, amb molta cura sobre els seus respectius triangles, la llargada d'a, b, c, h, m i n. Probablement els alumnes ja coneixen el teorema de Pitàgores i podran comprovar que els valors obtinguts compleixen que $a^2 = b^2 + c^2$. A continuació els demanarem que, amb les mesures del seu triangle, calculin h^2, b^2, c^2, m·n, a·n i a·m. S'observen coincidències?

Descoberta

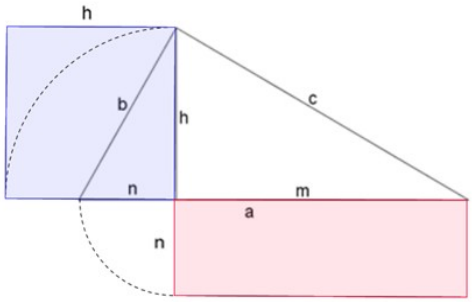
Els alumnes se n'adonen que, en cadascun dels seus triangles, es compleix que $h^2 = m \cdot n$, $b^2 = a \cdot n$ i $c^2 = a \cdot m$, llevat de petits errors deguts a la precisió dels amidaments. I això passa en tots els triangles rectangles escollits!
Acabem de descobrir una possible regularitat!
Podem comprovar-la en més cassos, especialment si fem servir el GeoGebra. La construcció amb GeoGebra, en ella mateixa, ja té un clar interès geomètric.

Conceptuació

Ara intentarem expressar, de manera clara i concisa, la propietat observada.
Posem en comú els enunciats elaborats pels diferents alumnes i convenim un enunciat que creguem que descriu bé la propietat que hem «descobert».

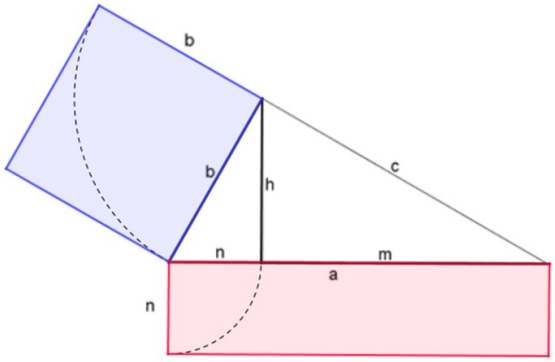
Més enllà de l'expressió algebraica és interessant aturar-se en la seva interpretació geomètrica, en el fet que estem expressant una relació entre àrees de quadrats i de rectangles:

- El quadrat de costat h (en blau a la figura següent) té la mateixa àrea que el rectangle de costats n i m (en vermell a la figura següent).



  Aquí es pot fer alguna observació sobre el sentit de la mitjana geomètrica.

- El quadrat de costat b (en blau) té la mateixa àrea que el rectangle de costats a i n (en vermell).



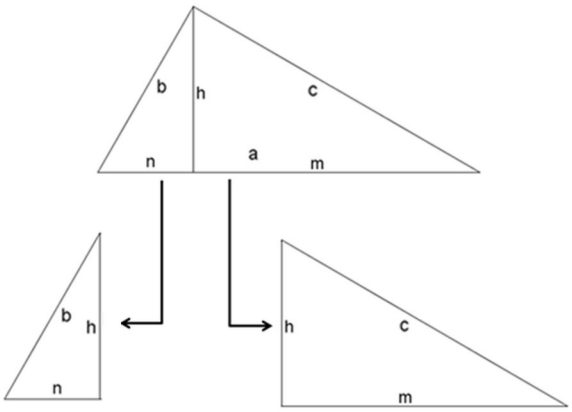
- Igualment es pot fer observar que el quadrat de costat c té la mateixa àrea que el rectangle de costats a i m.

Procurem que quedi constància escrita del que hem fet i de la nostra «descoberta».

Demostració

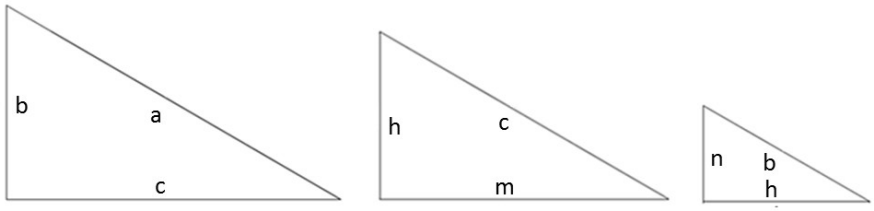
Malgrat que la propietat observada s'hagi complert per a tots els nostres triangles, encara no deixa de ser una conjectura. Caldrà demostrar-la!

Per això proposem als alumnes que retallin el triangle que han fet servir fins ara i un segon triangle idèntic retolat amb les mateixes lletres. Un cop fet això es demana que tallin el segon triangle seguint l'altura. Així obtindran dos triangles com indica la figura. Convé que els alumnes repassin la retolació dels elements d'aquests triangles ja que, en retallar-los, pot ser que s'hagi perdut el rètol d'algun costat, h, m o n (observis que en el dibuix els rètols ja estan a la part interior de les figures).



Arribats aquí cada alumne té tres triangles: l'original i dos procedents de tallar-ne un d'igual. Superposant els tres triangles veurem que es tracta de triangles semblants. La constatació visual es pot reforçar argumentant la igualtat dels seus angles. La descoberta d'aquesta semblança, en si mateixa, ja té un notable interès.

A continuació podem posar els tres triangles un al costat de l'altre com mostra la figura:



Si els triangles són semblants els seus costats seran proporcionals. Escrivint aquestes relacions de proporcionalitat quedaran demostrades les nostres descobertes:

Si comparem els dos últims triangles obtindrem que $h^2 = m \cdot n$. Així quedarà demostrada la relació que anomenarem "teorema de l'altura":

$$\frac{c}{b}=\frac{h}{n}=\frac{m}{h} \rightarrow h^2=m \cdot n$$

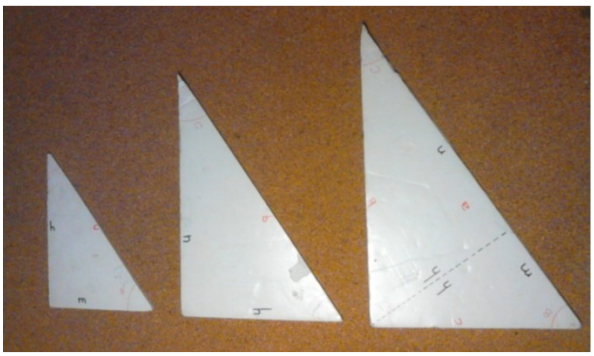
Si comparem el primer i el tercer triangles obtindrem que $b^2 = a \cdot n$. Així quedarà demostrada una de les relacions del "teorema del catet":

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{n}=\frac{c}{h} \rightarrow b^2=a \cdot n$$

Si comparem el primer i el segon triangles obtindrem que $c^2 = a \cdot m$. Així quedarà demostrada l'altra relació del "teorema del catet":

$$\frac{a}{c}=\frac{c}{m}=\frac{b}{h} \rightarrow c^2=a \cdot m$$

Aquesta demostració la poden anar fent els alumnes amb els seus triangles retallats o, un cop observada la semblança dels triangles, fer-la conjuntament amb tres triangles del professor. En aquest cas, per tal que es vegi millor, el docent pot tenir tres triangles grans en cartró ploma com els de la fotografia:



Continguts més rellevants que es tracten:

Triangles rectangles, hipotenusa i catets. Teoremes de l'altura i dels catets. Construccions geomètriques. Raonament geomètric.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Amb aquesta proposta es pot treballar la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques). Així mateix la interpretació gràfica dels teoremes de l'altura i dels catets pot contribuir a desenvolupar la competència 9 de la dimensió de comunicació i representació (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic).

Comentaris i referències:

Es important que tots els alumnes utilitzin la mateixa notació per indicar els elements del triangle rectangle. Això facilitarà la comparació dels resultats i les argumentacions.

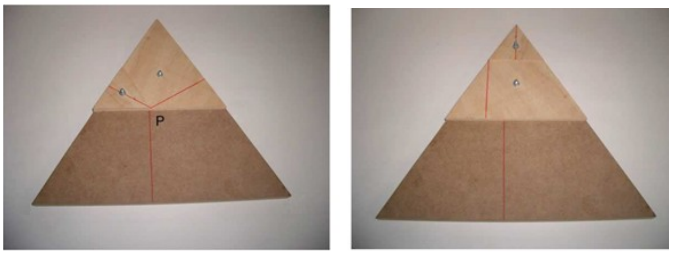
La interpretació gràfica dels teoremes de l'altura i dels catets és especialment interessant ja que afegeix sentit a la seva expressió algebraica. També és una bona oportunitat per presentar o consolidar la idea de mitjana geomètrica.

Aquesta proposta, plantejada en quatre etapes (**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**), permet donar a l'alumnat una participació activa en la construcció de coneixement entorn als teoremes de l'altura i dels catets.

Proposta d'activitat

Títol: Descobrim el teorema de Viviani

Imatge:



Agrupament:

Sembla aconsellable de fer individualment l'exploració i descoberta inicial (així cada alumne assumeix personalment la regularitat que s'observa) amb una posada en comú final. L'exploració en nous triangles equilàters (sobre paper i amb GeoGebra) es pot fer en parella per tal de verbalitzar les accions que es porten a terme i consolidar la descoberta a través de l'intercanvi d'opinions. La demostració final es farà conjuntament.

Material:

Regles graduats, escaires i compassos. Fotocòpies d'un full amb un triangle equilàter. Model en fusta o cartró ploma per fer una demostració visual del teorema de Viviani (vegis la imatge). També caldrà disposar de GeoGebra.

Descripció:

L'activitat comença lliurant a cada alumne un fotocòpia d'un full on apareix simplement un triangle equilàter i demanant que cadascú assenyali el punt que vulgui en el seu interior. Tot seguit convidem l'alumnat a què, emprant el regle i el compàs o l'escaire, tracin les rectes perpendiculars des del punt escollit a cada costat. Cal insistir en què facin aquesta operació amb molta cura, repassant si cal el mètode de construcció. Després es demana que mesurin les distàncies des del punt escollit a cadascun dels costats (el traçat previ de les perpendiculars ajudarà a què aquest amidament sigui més precís). Com que tothom ha escollit el punt que ha volgut, les mesures que s'obtinguin seran diverses.

A continuació els demanem que sumin les tres distàncies i que indiquin el valor que han obtingut. Aquí sorgeix la sorpresa: tothom obté el mateix resultat malgrat que han escollit diferents punts! Cal remarcar que és possible que hi hagin petites diferències degudes a la precisió de les mesures fetes amb el regle graduat.

De manera natural sorgirà una pregunta: El nombre que tothom ha obtingut té alguna propietat especial? Està relacionat amb algun element del triangle? Així s'obre una nova oportunitat de recerca a classe. Els alumnes prenen mesures. El més natural és mesurar el costat i no s'hi veu coincidència. Finalment algú amida l'altura del triangle (novament caldrà tenir cura en el traçat de la perpendicular) i observa amb sorpresa que la longitud de l'altura coincideix amb la suma de les tres distàncies que havíem obtingut. Tothom ho va provant i la descoberta es comparteix.

A partir d'aquí sorgeix una nova pregunta: Això passa per aquest triangle equilàter concret o es compleix per a tots els triangles equilàters? Caldrà investigar!

Formant parelles convidem als alumnes a què construeixin els seus propis triangles equilàters, escullin un punt interior, calculin les tres distàncies als costats, les sumin i comprovin que el resultat obtingut és igual a l'altura del triangle. Les operacions de suma de distàncies i de comparació amb l'altura no cal fer-les emprant el regle graduat: es pot traçar una recta i sobre ella, amb l'ajut d'un compàs, traslladar-hi, de manera consecutiva, els tres segments que van perpendicularment des del punt escollit als costats. Així, conjuntament, s'obtindrà un segment la longitud del qual serà la suma de les tres distàncies. Després, amb el compàs, "agafarem" l'altura del triangle i la superposarem al segment anterior tot observant que la longitud coincideix. És una manera gràfica de fer aquestes comprovacions, sense necessitat de prendre mesures.

Així s'anirà observant que la propietat descoberta per aquell triangle concret del full fotocopiat inicial també es compleix per als diversos triangles equilàters que ens puguem inventar. És interessant reforçar aquesta idea fent el mateix amb GeoGebra. La construcció és fàcil i instructiva i poden emprar-se les eines de mesura del programa per comprovar la igualtat movent el punt escollit o canviant el triangle equilàter. En aquest moment la descoberta està consolidada!

Per tal de perfilar bé la regularitat observada demanarem que cada parella escrigui en un paper, de la manera més clara possible, el que s'ha descobert (no pas el procés que s'ha fet) i ho compartirem. Aquesta posada en comú ajudarà a aclarir la idea, la terminologia emprada i la lògica del text per tal que descrigui adequadament el que es vol expressar. Comparant i polint, probablement s'acabarà obtenint una frase del tipus:

> *En qualsevol triangle equilàter la suma de les distàncies des d'un punt interior a cadascun dels seus costats és sempre igual a l'altura del triangle.*

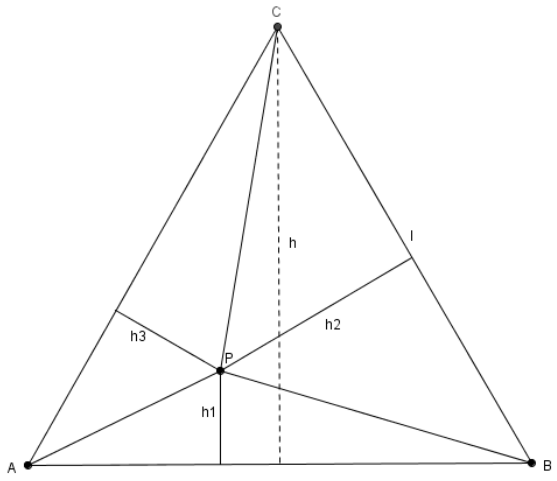
Així enunciem en una text curt i compartit el nostre descobriment!

Tanmateix el fet que una propietat es compleixi en molts casos particulars no vol dir que sigui certa. Fins ara la nostra descoberta és una conjectura! Tan sols arribarà a ser un teorema si l'aconseguim demostrar!

A aquestes alçades de l'activitat, entre l'alumnat, probablement, hi haurà interès en demostrar la propietat que acaben de descobrir. Es pot optar per dues possibilitats:

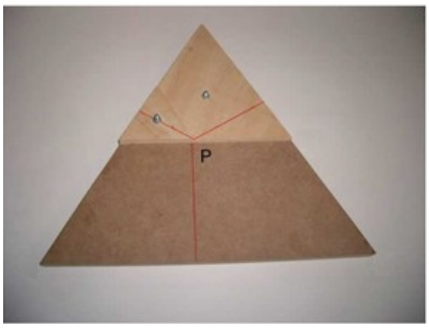
1. Una demostració de caire més algebraic basada en establir una igualtat entre àrees. Anomenant A, B i C als vèrtexs del triangle i P al punt interior, és evident que l'àrea del triangle ABC coincideix amb la suma de les àrees dels triangles APB, BPC i CPA. Anomenem h i l a l'altura i al costat, respectivament, del triangle equilàter i h_1, h_2 i h_3 a les altures respectives dels triangles APB, BPC i CPA que passen del punt P i cauen sobre els corresponents costats. Igualant àrees tindrem:

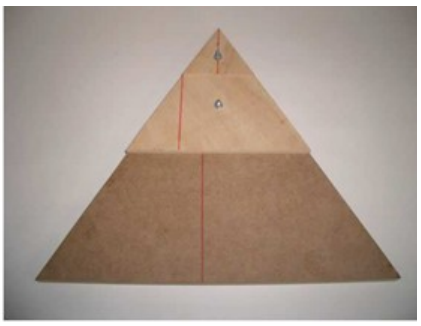
$$\frac{1}{2}l\cdot h=\frac{1}{2}l\cdot h_1+\frac{1}{2}l\cdot h_2+\frac{1}{2}l\cdot h_3$$



Simplificant $\frac{1}{2}l$ obtindrem la igualtat $h=h_1+h_2+h_3$. Tenint en compte que h_1, h_2 i h_3 són les distàncies del punt P als tres costats, la propietat queda demostrada.

2. Una bonica demostració visual basada en un material manipulable format per tres triangles equilàters instal·lats un sobre l'altre de manera que, a través de dos girs, les tres distàncies "recobreixen" exactament l'altura del triangle gran tal com descriuen les imatges:





Aquesta proposta es pot consultar a l'ARC (Aplicació de Recursos al Currículum): http://apliense.xtec.cat/arc/node/1282. El magnífic model que apareix a les imatges va ser construït pel professor Quim Tarradas.

Un cop feta la demostració la nostra descoberta ha deixat de ser una conjectura i s'ha convertit en un teorema! De fet, a part de ser el nostre teorema, és el Teorema de Viviani que porta aquest nom en honor al seu primer descobridor, Vincenzo Viviani (Florència, 1622 – Florència, 1703), un deixeble de Galileu.

Al llarg d'aquesta activitat s'ha fet un camí on es veuen clares les etapes d'**experimentació**, de **descoberta**, de **conceptuació** i de **demostració**. Més enllà del valor conceptual del teorema de Viviani, la verdadera riquesa d'aquesta activitat està en aquest camí, en l'experiència viscuda pels alumnes construint idees geomètriques en primera persona.

Una possible ampliació d'aquesta exploració podria partir de noves preguntes: També es compliria aquesta propietat si prenem el punt sobre algun dels costats o algun dels vèrtexs del triangle? Es podria formular una propietat semblant per a un triangle isòsceles on els costats iguals fossin el doble de llargs que el costat diferent? Es podria pensar en una generalització a tres dimensions per a tetraedres regulars?... Aquestes preguntes impulsaran noves experimentacions (en les quals el GeoGebra ens pot ser molt útil!), noves descobertes i, si cal, noves demostracions.

Continguts més rellevants que es tracten:

Geometria del triangle. Teorema de Viviani. Construccions geomètriques amb regle, compàs i escaire i amb GeoGebra. Aspectes de metodologia matemàtica: conjectures i teoremes, comprovacions i demostracions.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Aquesta proposta d'activitat permet treballar especialment la competència 4 de la dimensió de resolució de problemes (Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes), la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir,

expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques) i la competència 11 de la dimensió de comunicació i representació (Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques). L'ús del Geogebra pot contribuir a desenvolupar la competència 12 de la dimensió de comunicació i representació (Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics).

Comentaris i referències:

El teorema de Viviani està força absent en l'educació matemàtica malgrat expressar un resultat ben sorprenent que posa en joc elements senzills d'un triangle com són l'altura i les distàncies des d'un punt interior als costats. Probablement sigui degut a què, a diferència de teoremes com el de Pitàgores o el de Tales, no és imprescindible per fonamentar altres resultats i, per a un estudiant de secundària, té un limitat interès pràctic. Tanmateix té un innegable interès educatiu en oferir una excel·lent oportunitat per a què els alumnes facin un procés geomètricament ric d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**, manejant idees ben al seu abast.

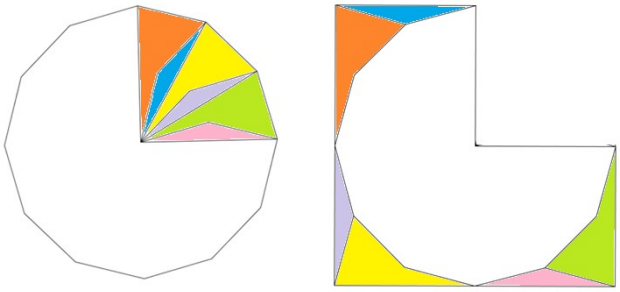
En aquest procés també s'haurà transmès als alumnes una idea clau per entendre la construcció del coneixement matemàtic: la diferència entre una conjectura, resultat de comprovacions experimentals concretes, i un resultat demostrat en general. És una idea tan subtil com rellevant!

En un dels "*Desafíos matemáticos*" que es varen plantejar en el diari *El País* en ocasió del centenari de la Real Sociedad Matemática Española es va proposar una aplicació contextualitzada del Teorema de Viviani. El problema va ser presentat i resolt pel professor David Obrador a través de dos vídeos que poden ser útils a classe i que es poden consultar al web: http://goo.gl/Uj2xWH .

Proposta d'activitat

Títol: El secret del dodecàgon regular

Imatge:



Agrupament:

Per a les construccions i experimentació amb GeoGebra i amb el full de càlcul sembla millor treballar en parella per tal de promoure l'intercanvi d'arguments. La demostració visual, presentada pel professor, es farà conjuntament tota la classe.

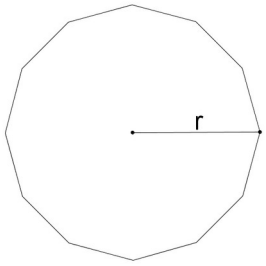
Material:

Caldrà disposar de GeoGebra (o d'algun altre programa de geometria dinàmica) i d'un full de càlcul (en el cas del GeoGebra ja n'incorpora un). Per a la demostració visual s'haurà de disposar d'un dodecàgon retallat amb peces per recompondre. Se aconsella fer-ho amb paper magnètic sobre una base metàl·lica.

Descripció:

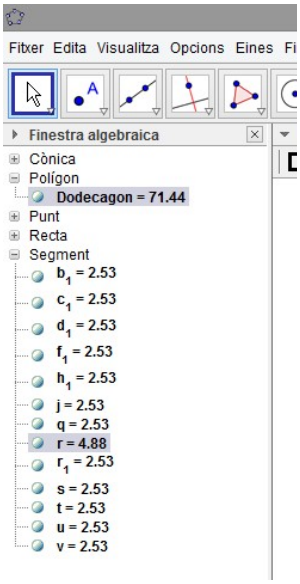
Malgrat ser una figura de fàcil construcció hem de reconèixer que el dodecàgon regular ha estat poc present a les classes de geometria. En aquesta activitat, seguint els passos que es descriuen tot seguit, intentarem albirar algun dels seus secrets a través d'un procés d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**.

1. Construcció d'un dodecàgon regular amb GeoGebra. No té dificultats especials a partir de la construcció de l'hexàgon regular. És important que s'assenyali el radi tal com mostra la figura següent.

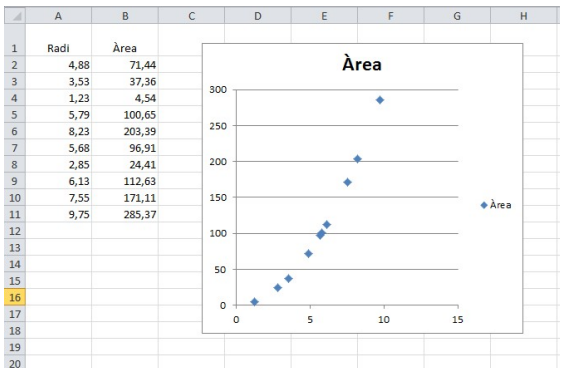


Per a la construcció del dodecàgon a partir dels vèrtexs serà convenient emprar l'opció "polígon" del GeoGebra en lloc de traçar els 12 costats separadament. Això serà rellevant per a l'activitat següent.

2. Elaboració d'una taula de radis i àrees a partir de les dades que dóna el GeoGebra. A la finestra algebraica de la pantalla del GeoGebra es pot observar que apareix el valor del segment r (radi) i l'àrea del dodecàgon.



En canviar el radi s'obtindran diferents àrees de manera que podrem anar elaborant una taula de valors i representar-la en un gràfic (emprant, per exemple, un full de càlcul) com mostra la imatge.



La distribució de punts del gràfic suggereix que puguin correspondre a una paràbola amb vèrtex a l'origen i, per tant, que entre el radi i l'àrea hi hagi una

relació quadràtica del tipus $\text{Àrea}(r) = k\,r^2$. Això aconsella construir una nova columna en el full de càlcul amb els valors del radi al quadrat per tal de veure si podem descobrir alguna relació amb l'àrea.

	A	B	C
1	Radi	Àrea	Radi al quadrat
2	4,88	71,44	23,8144
3	3,53	37,36	12,4609
4	1,23	4,54	1,5129
5	5,79	100,65	33,5241
6	8,23	203,39	67,7329
7	5,68	96,91	32,2624
8	2,85	24,41	8,1225
9	6,13	112,63	37,5769
10	7,55	171,11	57,0025
11	9,75	285,37	95,0625
12			

S'observa algun patró en la relació entre el radi al quadrat i l'àrea? Probablement alguns alumnes descobriran que l'àrea és molt propera (en alguns casos idèntica) al triple del radi al quadrat. Potser ens cal fer una nova columna en el full de càlcul:

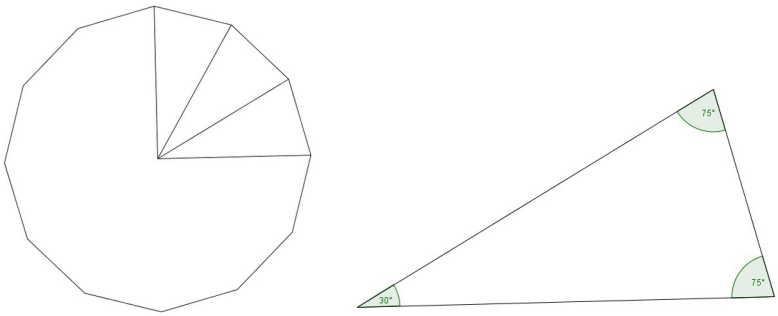
	A	B	C	D
1	Radi	Àrea	Radi al quadrat	Tres vegades el radi al quadrat
2	4,88	71,44	23,8144	71,44
3	3,53	37,36	12,4609	37,38
4	1,23	4,54	1,5129	4,54
5	5,79	100,65	33,5241	100,57
6	8,23	203,39	67,7329	203,20
7	5,68	96,91	32,2624	96,79
8	2,85	24,41	8,1225	24,37
9	6,13	112,63	37,5769	112,73
10	7,55	171,11	57,0025	171,01
11	9,75	285,37	95,0625	285,19
12				

Ara es veu clarament la gran proximitat dels valors de la segona columna i de la quarta. Sembla que hem descobert un patró per a la relació entre àrea i radi, però a què poden ser degudes les diferències que afecten a alguns decimals? Una pregunta interessant que mereix una conversa d'aula amb opinions, conjectures, argumentacions... i que probablement conduirà cap als errors de mesura i a l'efecte amplificador d'elevar al quadrat i multiplicar per 3.

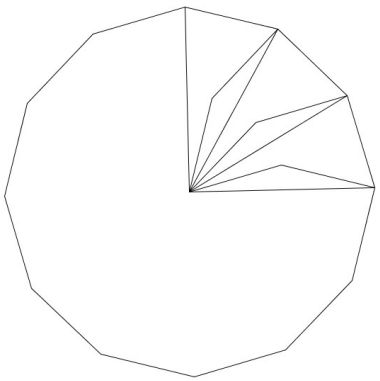
3. Tota aquesta experimentació ha portat a una descoberta, $\text{Àrea}(r) = 3r^2$, que és curiosa per la seva simplicitat. Qui es podia imaginar que un dodecàgon regular tingués un "secret" tan bonic! Serà bo deixar constància clara de la relació que s'ha observat, destacant així ben perfilat el concepte resultant de l'experiència. Tanmateix, malgrat la constatació numèrica, la nostra descoberta encara tan sols és una conjectura!

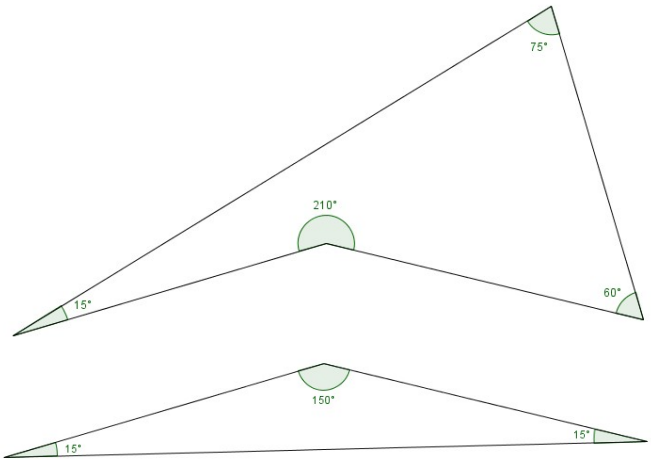
4. La demostració que, en un dodecàgon regular, $\grave{A}rea(r)=3r^2$ es pot abordar a partir de la fórmula de l'àrea d'un polígon regular, emprant el sinus i el cosinus d'un angle de 15°, però queda en el límit dels continguts de l'ESO. Tanmateix hi ha una demostració gràfica molt bonica. Malgrat que es pot fer a classe retallant les figures amb cartró, potser el més adequat és que el professor ja la porti preparada i se centri en la demostració que es vol fer. A continuació es fan indicacions per poder preparar les peces.

   Dividim un dels quadrants del dodecàgon en tres triangles com mostra la figura següent. També es mostra en detall un dels triangles i s'identifiquen els angles:

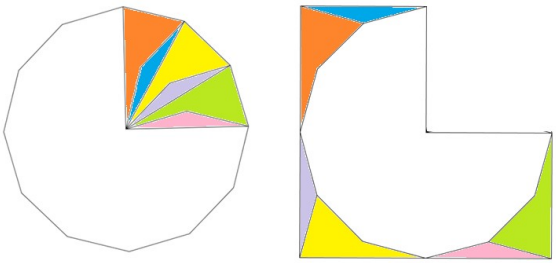


   Ara dividim cadascun d'aquests triangles en dues parts com mostra la imatge següent. Una part és un triangle isòsceles d'angles de 150°, 15° i 15° i l'altra part un quadrilàter d'angles 15°, 210°, 60° i 75°. En tots els casos s'indiquen els angles per què, en la demostració (depenent del grup d'alumnes) pot ser interessant de comprovar que les peces encaixin i que determinades sumes donin angles rectes.



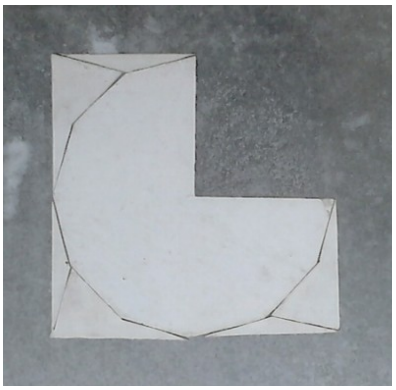


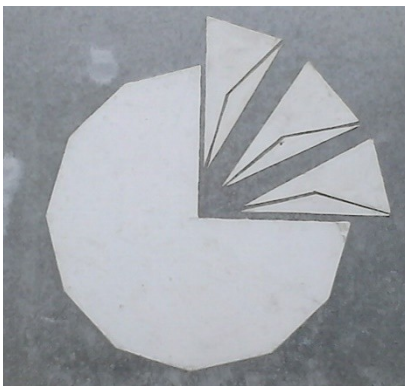
Convé retallar totes aquestes peces per tal de fer la demostració simplement re-col·locant-les tal com mostra la imatge següent.



Les dues figures de la imatge tenen la mateixa àrea i, alhora, queda molt clar que la de la dreta està formada per tres quadrats de costat igual al radi r del dodecàgon. Així doncs la seva àrea és $3r^2$ tal com es volia demostrar.

És aconsellable imprimir les peces en paper imantat, retallar-les i moure-les sobre una pissarra o una placa metàl·lica. És el cas del material que es mostra en les imatges, ja una mica malmès pel seu ús:





Continguts més rellevants que es tracten:

Els polígons regulars i les seves propietats. Àrees i angles. Construccions amb GeoGebra. Taules de valors i representacions gràfiques. Relacions funcionals (en concret la funció quadràtica). Raonament visual. Segons el mètode de demostració també es treballaran conceptes trigonomètrics.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

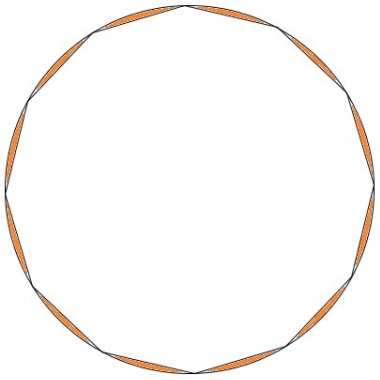
Tant el procés de descoberta que es porta a terme com la demostració visual que es proposa poden contribuir a desenvolupar la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques). La recerca, en un context geomètric, del patró que expressa la relació funcional entre àrea i radi pot contribuir a desenvolupar la competència 7 de la dimensió de connexions (Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar). L'ús d'eines tecnològiques (construccions de geometria dinàmica i full de càlcul per fer taules i representació de funcions) permet treballar la competència 12 de la dimensió de comunicació i representació (Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics).

Comentaris i referències:

Aquesta és una activitat bonica que segueix un procés molt clar d'**experimentació**, **descoberta**, **conceptuació** i **demostració**. L'experimentació es fa a través del GeoGebra. La representació a través de taules i gràfics de les dades obtingudes ens condueix cap a fer una descoberta que després caldrà perfilar clarament i demostrar. És especialment elegant i directa la demostració visual movent parts del dodecàgon. Els detalls que es donen sobre la construcció d'aquestes parts estan adreçats als professors per tal que puguin preparar adequadament el material. Si s'optés per dedicar-hi més temps els propis alumnes podrien fer la construcció d'aquestes peces però, en general, la demostració quedarà molt clara simplement emprant les peces ja construïdes i fent alguna reflexió sobre els angles.

La construcció del dodecàgon amb GeoGebra és una activitat sense dificultats especials però ben instructiva des del punt de vista geomètric.

La descoberta d'una expressió per a l'àrea tan sorprenentment simple com $3r^2$ dóna a l'activitat un encant especial que encara es pot subratllar més si es compara amb l'àrea del cercle circumscrit que és πr^2. Sembla inevitable imaginar-se els decimals de π expressant (multiplicats pel radi al quadrat) l'àrea conjunta dels 12 segments circulars compresos entre el dodecàgon i el cercle.



Proposta d'activitat

Títol: Un sender de gran recorregut pel territori de les figures rodones

Imatge:

Agrupament:

El camí s'estructura en diferents trams. L'activitat que es proposa en el primer tram pot realitzar-se per parelles. Els altres trams es faran de manera conjunta tot el grup classe.

Material:

Objectes cilíndrics i fils. Un cercle de cartró partit en sectors circulars amb un tros de cinta adhesiva que manté unit el contorn. Un paquet de galetes cilíndric. Cilindres i cons de plàstic amb la mateixa base i la mateixa altura emplenables amb aigua. Si es vol, també prismes i piràmides. Una esfera dividida en peces quasi còniques.

Descripció:

Al llarg de l'ESO es van presentant conceptes referents a figures rodones i expressions per al càlcul d'alguns dels seus elements: longitud d'una circumferència, àrea d'un cercle, volum d'un cilindre, volum d'un con, volum d'una esfera, àrea d'una esfera... Però, molt sovint, aquestes fórmules s'introdueixen sense cap recolzament argumental, de manera memorística. Fins a cert punt això és lògic donat que una demostració rigurosa requeriria eines que superen de molt l'abast de l'ESO. Tanmateix, si bé no és possible fer demostracions d'aquestes fórmules, sí que es poden fer raonaments plausibles que mostren intuïtivament la seva validesa. Entorn a aquests raonaments convé fer dos apunts:

- A vegades no estan tan allunyats com pugui semblar de la demostració rigurosa. Sovint la diferència és un pas al límit, per exemple, convertint una suma finita en una integral.

- Un raonament d'aquest tipus, molt sovint, ajuda més a la comprensió dels conceptes implicats que una demostració formal. En aquest sentit és molt addient reproduir les paraules de Puig Adam: "*No sempre una demostració basada en la reducció a veritats anteriors, qualitat característica de les demostracions de l'escola grega, és la que tradueix les essències de la propietat demostrada, ni molt menys la més adequada des del punt de vista didàctic. Per als matemàtics orientals, demostrar era reduir a l'evidència directa, la qual percep el nen millor que un encadanament lògic, del qual no sol veure ni l'abast ni la necessitat*" (Puig Adam, P. *La Matemática y su enseñanza actual*, 1960).

El sender que es dibuixa en aquesta proposta travessa el territori de les figures rodones tot presentant materials i raonaments per anar assolint, tram a tram, els diversos conceptes (longitud d'una circumferència, àrea d'un cercle, volum d'un cilindre, volum d'un con, volum d'una esfera, àrea d'una esfera...). A la pràctica no es faran tots els trams seguits sinó que s'estendran al llarg de tota l'ESO, tanmateix pot ser bo imaginar-ho com un camí encadenat per visualitzar clarament com van encaixant els diferents trams.

Tram 1: Fins a la longitud d'una circumferència

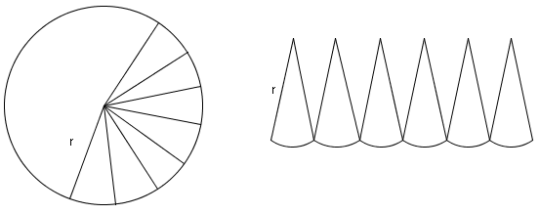
El nombre π i la longitud d'una circumferència. Cada alumne porta un cilindre (un pot, una tapadora, un tros de tub gran...) i hi enrotlla un fil al voltant. Dividint la longitud del fil entre el diàmetre del cilindre els diferents alumnes obtenen un valor significativament igual. És el nombre π. Vegis la proposta d'activitat que porta per títol "*Mesurem π i mesurem amb π*".

A partir d'aquí podem concloure que la longitud l d'una circumferència de diàmetre d i radi r ve donada per l'expressió $l = \pi d = 2\pi r$.

Tram 2: Des de la longitud d'una circumferència fins a l'àrea d'un cercle

Iniciem el camí a partir de la longitud d'una circumferència i prenem un cercle de cartró dividit en sectors circulars amb un tros de cinta adhesiva que manté unit el

contorn. En obrir per un dels radis s'obté un conjunt de sectors enllaçats per la base tal com mostra la imatge de la dreta.



És evident que l'àrea del cercle coincidirà amb la suma de les àrees dels sectors, cadascun dels quals es podrà aproximar per l'àrea d'un triangle d'altura r i bases $b_1, b_2, b_3, b_4 \ldots$ Així es trindrà que l'àrea del cercle podrà aproximar-se per

$$\frac{1}{2} r b_1 + \frac{1}{2} r b_2 + \frac{1}{2} r b_3 + \frac{1}{2} r b_4 + \ldots$$

Treient factor comú tindrem:

$$\frac{1}{2} r \left(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots \right)$$

Però la suma de les bases és la longitud de la circumferència que, segons hem deduït en el tram anterior és $2\pi r$, per tant tindrem que:

$$\text{Àrea del cercle} \approx \frac{1}{2} r \, 2\pi r = \pi r^2$$

Quan el nombre de sectors singui molt gran les bases seran molt petites i el sector s'aproparà més a un triangle de manera que, quan el nombre de sectors tendeixi a l'infinit, el signe d'aproximació de l'expressió anterior s'anirà convertint en una igualtat (observis que estem fent un pas al límit des de la intuïció!). Així tindrem:

$$\text{Àrea del cercle} = \pi r^2$$

I s'haurà arribat al destí d'aquest tram de camí!

Tram 3: Des de l'àrea d'un cercle al volum d'un cilindre

La fotgrafia mostra un paquet de galetes. És "quasi un cilindre" format per la superposició de "quasi cercles".

El volum del *cilindre* serà el producte del d'una galeta pel nombre de galetes que el componen. Així sembla intuïtiu deduir que el volum del cilindre serà l'àrea de la base per l'altura. Si anomenem r al radi de la base i h a l'altura, aplicant el que hem deduït en el tram anterior tindrem que:

$$Volum\,del\,cilindre = \pi r^2 h$$

Tram 4: Des del volum d'un cilindre al volum d'un con

En aquest tram emprarem el material que es veu en la fotografia següent: es tracta de parelles formades per un cilindre i un con amb la mateixa base i la mateixa altura i per diversos prismes i piràmides també amb la mateixa base i la mateixa altura. Són peces de plàstic buides que es poden emplenar d'aigua.

Emplanarem d'aigua el con i, a continuació, la passarem al cilindre. L'aigua ocuparà una part del cilindre. Tornarem a fer la mateixa operació i encara la farem un tercer cop descobrint que en el cilindre hi caben exactament tres cons de la mateixa base i la mateixa altura. Aquesta experiència, aplicant el que hem deduït en el tram anterior, ens permetrà afirmar que, si anomenem r al radi de la base i h a l'altura del con, tindrem:

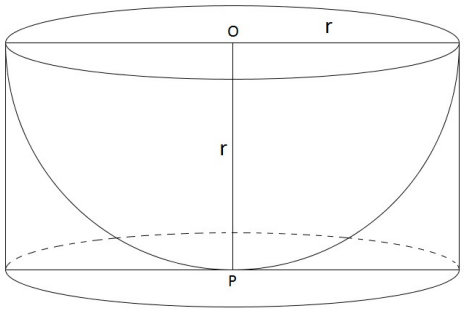
$$Volum\,del\,con = \frac{1}{3}\pi r^2 h\,.$$

Tram 5: Des del volum d'un con al volum d'una esfera

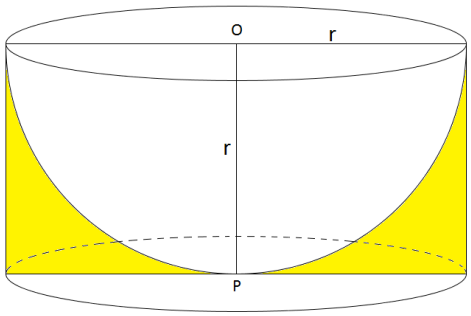
Així arribem a un dels trams més delicats i bonics del camí, el que ens conduirà fins al volum d'una esfera. Algunes idees que es posaran en joc requeriran certa atenció i temps per a què els alumnes puguin seguir-ho bé. Necessitarem dues eines: el principi de Cavalieri i l'escudella de Galileu. Aturem-nos-hi!

El **principi de Cavalieri** afirma que si dos cossos tridimensionals són tals que, tallats a la mateixa altura, donen sempre dues seccions d'àrees iguals, llavors tenen el mateix volum. Aquesta afirmació sembla bastant intuïtiva tot entenent el volum com la s*uma* de seccions (recordem el paquet de galetes!). De fet, és una idea molt pròxima al càlcul de volums per integració ja que la suma d'infinites seccions d'amplada infinitessimal serà una integral.

L'**escudella de Galileu** és un cos trimensional que es construeix així: prenem un cilindre tal que el radi de la base i l'altura valguin r i col·loquem dins d'aquest cilindre una semiesfera de radi r tal com mostra la figura següent.

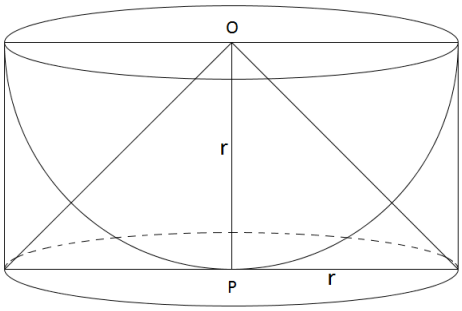


L'espai de base circular que queda entre el cilindre i la semiesfera és l'escudella de Galileu. En la figura següent se'n mostra una secció en groc.



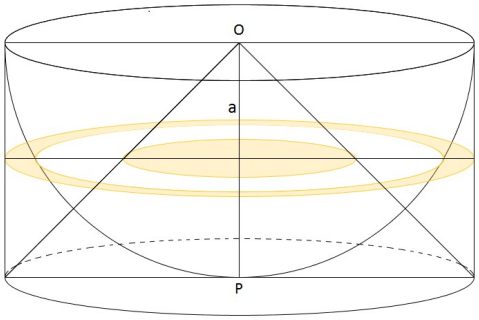
Conegudes les eines comencem el trajecte!

Posem, dins del cilindre, un con tal que el radi de la base i l'altura valguin r tal com mostra la figura següent:



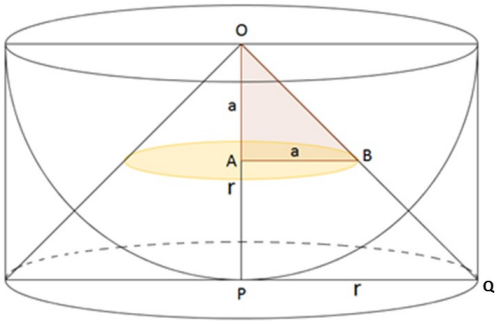
Això recorda molt les parelles de cons i cilindres que vàrem fer servir en el tram 4 del camí, de manera que està clar que el volum del con serà una tercera part del volum del cilindre. Tanmateix aquest fet, per ara, no l'utilitzarem.

Ara tallarem aquest cos per un pla parl·lel a la base que dista a unitats del punt O. Observem que el con dóna com a secció un cercle i que l'escudella de Galileu dóna com a secció una corona circular. En la figura següent estan acolorides.

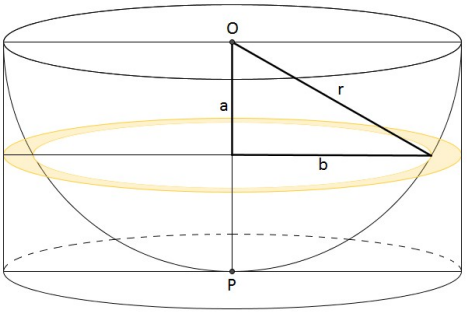


I aquí es produeix un resultat sorprenent: aquestes dues seccions tenen la mateixa àrea sigui quina sigui l'altura per on fem el tall. Ho demostrarem tot seguit.

En primer lloc calculem l'àrea del cercle resultant de seccionar el con. Si el pla estava a distància a del punt O, aplicant el teorema de Tales en els triangles OPQ i OAB, observarem que el radi del cercle (AB) serà també a. Per tant la seva àrea serà πa^2.



Ara calculem l'àrea de la corona circular resultant de seccionar l'escudella de Galileu. El radi exterior de la corona serà r i el radi interior (b) es calcularà aplicant el teorema de Pitàgores (vegis la figura següent): $b=\sqrt{r^2-a^2}$. Llavors l'àrea de la corona serà: $\pi r^2-\pi b^2=\pi r^2-\pi\left(r^2-a^2\right)=\pi a^2$.



Així doncs acabem de demostrar que, tallant a una mateixa alçada, el con i l'escudella de Galileu, sempre obtenim seccions de la mateixa àrea. Aplicant el principi de Cavalieri haurem demostrat que el con i l'escudella de Galileu tenen el mateix volum. Com que el volum del con és una tercera part del volum del cilindre, resulta que el volum de l'escudella de Galileu també serà una tercera part del volum del cilindre:

$$Volum\,escudella=\frac{1}{3}\pi r^2 r=\frac{1}{3}\pi r^3$$

Ara bé, el volum de la semiesfera serà el volum del cilindre menys el volum de l'escudella de Galileu. Així tindrem:

$$Volum\,semiesfera=\pi r^3-\frac{1}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3$$

I per tant podrem deduir el volum de l'esfera completa:

$$Volum\,esfera=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Per un resultat tan important valia la pena aquest trajecte llarg però bonic!

Tram 6: Des del volum d'una esfera a la superfície d'una esfera

La fotografia de l'esquerra mostra una esfera composada per "quasi cons" (aproximadament com les boletes de xiprer) i la de la dreta mostra els "quasi cons" separats (observis que, a diferència dels cons, les seves bases són casquets esfèrics).

Seguint aquesta idea, podríem dividir una esfera en molts petits "quasi cons". Tants i tan petits com vulguem! Quants més "quasi cons" tinguem, seran més petites i més properes a un con. El volum de l'esfera serà la suma del volum d'aquests "quasi cons" que tindran tots per altura el radi de l'esfera (que anomenarem r) i bases respectives $B_1, B_2, B_3, B_4 \ldots$ Si aquests "quasi cons" són prou petits, podrem aproximar el seu volum pel volum d'un con i així podrem escriure:

$$Volum\,de\,l'\,esfera \approx \frac{1}{3} r\, B_1 + \frac{1}{3} r\, B_2 + \frac{1}{3} r\, B_3 + \frac{1}{3} r\, B_4 + \ldots$$

Traient factor comú tindrem:

$$Volum\,de\,l'\,esfera \approx \frac{1}{3} r \left(B ¿¿ 1 + B_2 + B_3 + B_4 + \ldots\right) ¿$$

Quan hi hagi molts "quasi cons", seran molt petits i pràcticament seran cons, de manera que l'aproximació anterior es convertirà en una igualtat (observis que aquí passem al límit). Per altra part la suma de les bases de tots els cons serà la superfície de l'esfera Sde manera que $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + \ldots = S$. Així tindrem que:

$$Volum\,de\,l'\,esfera = \frac{1}{3} rS$$

Però recordem que el volum d'una esfera era $\frac{4}{3}\pi r^3$. Per tant:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3} rS$$

Simplificant obtenim l'expressió de la superfície d'una esfera:

$$S = 4\pi r^2$$

I, amb aquest resultat tan bonic, deduït de manera intuïtiva, arribem al final del nostre camí pel territori de les figures rodones!

Continguts més rellevants que es tracten:

Figures rodones (circumferència, cercle, cilindre, con, esfera) i els seus elements. Longitud d'una circumferència, àrea d'un cercle, volum d'un cilindre, volum d'un con, volum d'una esfera i àrea d'una esfera. Expressions algebraiques. Raonament i intuïció geomètrica.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Aquest sender pot contribuir a desenvolupar especialment la competència 5 de la dimensió de raonament i prova (Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques). Algunes de les experiències que proposa també posen en joc la competència 8 de la dimensió de connexions (Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes).

Comentaris i referències:

Observis que el raonament del tram 6 és molt semblant al fet en el tram 2, però a la inversa: en el tram 2 es passa de la longitud a l'àrea (de dimensió 1 a dimensió 2), en el tram 6 es passa del volum a l'àrea (de dimensió 3 a dimensió 2). Tanmateix existeix una interessant simetria argumental.

Atès que aquest material està adreçat al professorat, en les descripcions d'alguns trams, s'ha emprat un nivell de notació matemàtica que, segons el grup, a classe potser convindria moderar. En sentit contrari, si els alumnes no presenten dificultats en seguir-ho i sempre sense forçar la situació, en algun dels trams, podrà introduir-se (tan sols com un apunt) la idea de sumatori que, passant al límit, donaria lloc a la integral que es treballarà a batxillerat.

El camí que s'ha descrit no està pensat per fer-se tot seguit, sinó per estendre's al llarg de tota l'ESO. Així, mentre que el tram 1 és adequat per a primer curs, els trams 5 i 6 ho són per a quart curs. En tot cas la proposta planteja una manera conjunta d'abordar longituds, àrees i volums de figures rodones basada en l'experimentació i el raonament plausible. Quan la demostració rigurosa no és possible, aquest plantejament més intuïtiu és l'única alternativa a la simple memorització.

Proposta d'activitat

Títol: Fotografia matemàtica

Imatge:

Dues fotografies extretes del concurs de fotografia matemàtica de l'ABEAM (Associació de Barcelona per a l'estudi i l'aprenentatge de les matemàtiques):

Títol: En què quedem, un hexàgon inscrit o circumscrit?
Autora: Halima Rachidi Rachidi
Centre: Institut Josep Comas i Solà (Barcelona)
Categoria: Primer cicle d'ESO

Títol: El teorema de Tales a la ciutat de París
Autora: Tamara Victòria Fernández
Centre: Institut Ramon Casas i Carbó (Palau Solità i Plegamans)
Categoria: Segon cicle d'ESO

Agrupament:

Es tracta d'una activitat que es pot plantejar de diverses maneres:

En el marc d'un concurs o simplement com a recerca col·laborativa d'imatges.
En l'àmbit d'un o de diversos cursos, de tot el centre o participant en activitats més generals com les que s'organitzen des d'algunes associacions de professorat de matemàtiques i altres institucions.

En funció del plantejament de l'activitat els alumnes podran participar-hi individualment o en petits grups. Fins i tot, en alguns casos, l'activitat s'obre a les famílies.

Material:

Els alumnes necessitaran disposar de càmeres fotogràfiques. Naturalment podran emprar telèfons mòbils, tauletes o altres dispositius que permetin prendre fotografies. Es pot fer una exposició virtual del material gràfic generat encara que, a vegades, serà bo imprimir algunes de les fotografies.

Descripció:

En l'apartat "Agrupament" ja s'han descrit diverses modalitats en què es pot portar a terme aquesta activitat: concurs o simplement construcció col·lectiva d'una col·lecció, a nivell de curs, d'escola o en el marc d'un acció més institucional, de manera individual o en petits grups... Es tracta d'animar als alumnes a mirar el seu entorn amb ulls matemàtics, a capturar imatges matemàticament suggeridores, a posar-hi un títol adequat, original, creatiu, amb un punt de gràcia i un toc de sorpresa.

Cal subratllar que si la imatge és important, el títol no ho és menys ja que revela la mirada de l'autor i expressa la interpretació que en fa i la lectura que ens proposa.

L'activitat es pot desenvolupar al llarg de mesos durant els quals els alumnes van penjant (paper, facebook, twitter, espais virtuals de treball...) les seves obres (imatges, títols i dades d'autoria). Periòdicament serà bo comentar-ho a classe, subratllant les "captures" més interessants, els títols més originals, les participacions més actives... Es tracta d'anar educant la mirada del món amb ulls matemàtics.

Aquesta activitat pot contribuir molt a la formació geomètrica de l'alumnat ja que es posen en joc molts continguts referents a espai i forma. A classe poden fer-se activitats que reforcin aquest aspecte: suggerir altres títols per a una fotografia, "descobrir" aspectes geomètrics que potser el títol no posa de manifest, relacionar diverses imatges a partir d'un contingut concret...

Continguts més rellevants que es tracten:

Pràcticament tots els continguts geomètrics de l'ESO són susceptibles de fer-se presents en la interpretació d'una imatge. Aquest és un dels mèrits de l'activitat que permet fer emergir elements geomètrics del nostre entorn.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Es tracta d'una activitat competencialment molt rica. En la dimensió de resolució de problemes permet treballar de manera molt directa la competència 4 (Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes). En la dimensió de raonament i prova contribueix a desenvolupar la competència 6 (Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics). És una activitat especialment potent per treballar la dimensió de connexions, en particular la competència 8 (Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes). En la dimensió de comunicació i representació treballa de ple la competència 12 (Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics).

Comentaris i referències:

El professor Santi Vilches afirma que *la fotografia matemàtica és una eina didàctica*. Es tracta d'acostumar als alumnes a descobrir les matemàtiques que hi ha al seu entorn. Tan important serà capturar imatges prou riques des del punt de vista geomètric com fer-ne interpretacions pertinents i imaginatives. És una activitat que pot relacionar-se amb qualsevol dels blocs de continguts matemàtics de l'ESO, tanmateix és especialment rellevant per posar en joc continguts geomètrics degut al seu clar aspecte visual i al fet que la geometria és la part de les matemàtiques que té una presència més directa i evident en el nostre entorn quotidià.

Aquesta activitat es pot realitzar amb un grup d'alumnes, en un centre (hi ha centres que tenen concursos consolidats) o participant en algun dels concursos que estan organitzats per associacions de professorat o per facultats universitàries. A tall d'exemple se'n citen tres:

Concurs de fotografia matemàtica de l'ABEAM (Associació de Barcelona per a l'estudi i l'aprenentatge de les Matemàtiques):
http://fotografiamatematica.cat/blg/

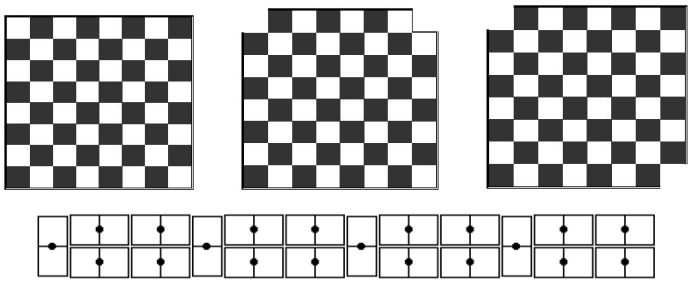
Concurs de fotografia matemàtica de l'ADEMGI (Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines):
http://ademgi.feemcat.org/concurs-de-fotografia/

FotoMath, Universitat de Lleida: http://www.fotomath.udl.cat/2m13/

Proposta d'activitat

Títol: Enrajolem un taulell d'escacs amb dominós

Imatge:



Agrupament:

Inicialment es treballarà en petits grups de 2 o 3 alumnes i, en el darrer tram de l'activitat, hi haurà una posada en comú de les argumentacions.

Material:

Per a cada grup ens caldrà disposar de:

1. Un taulell quadriculat de 8x8, com els d'escacs però sense pintar de blanc i negre.

2. Un taulell quadriculat de 8x8, com els d'escacs però sense pintar de blanc i negre en el qual s'han retallat els quadres dels extrems d'un dels costats.

3. Un taulell quadriculat de 8x8, com els d'escacs però sense pintar de blanc i negre, en el qual s'han retallat els quadres corresponents als dos vèrtexs dels extrems d'una diagonal.

4. Un taulell quadriculat de 8x8, com els d'escacs, amb quadres pintats de blanc i negre, en el qual s'han retallat els quadres corresponents als dos vèrtexs dels extrems d'una diagonal.

5. 32 fitxes de dominó de manera que cada fitxa cobreixi exactament dos quadres del taulell.

Descripció:

Es reparteix a cada grup els materials 1 i 5 i es demana que s'intenti recobrir tot el taulell amb les fitxes de dominó (recordem que cadascuna de les 32 fitxes recobreix dos dels 64 quadres) sense tallar cap fitxa ni superposar-les. Els grups, més o menys ràpid, ho faran sense dificultats.

A continuació es reparteix el material 2 (taulell en què falten dos quadres en els extrems d'un costat) i es demana de nou que s'intenti recobrir el taulell amb 31 fitxes de domino (ara hi ha tan sols 62 quadres!). Ben segur que tampoc hi haurà dificultats.

Ara repartirem el material 3 (taulell en què falten dos quadres en els extrems d'una diagonal) i, novament, es demana que s'intenti fer el recobriment. Ara sembla que les coses no surten tan ràpidament. Ho van intentant seguint estratègies diverses però no acaben d'aconseguir recobrir-ho tot. Va passant el temps i el repte comença a fer-se interessant. A vegades algun grup diu que troba la solució... tanmateix una revisió acurada mostra que s'ha superposat alguna fitxa. L'emoció creix i comença a sentir-se alguna opinió de què és impossible... Tanmateix, si fos així, caldria demostrar-ho!

A partir d'aquí s'obre un període ple d'argumentacions primer dins dels grups i després entre grups. No és fàcil que surti una demostració coherent i completa però, a vegades, hi ha aproximacions molt notables. Si repartim el material 4 (els mateixos taulells incomplets però amb els quadres pintats de blanc i negre) potser ajudarem a què els alumnes construeixin bones argumentacions de la impossibilitat. També podem contribuir-hi fent preguntes com:

Quants quadres hi ha de color blanc i quants n'hi ha de color negre?
Una fitxa de dominó sempre cobreix un quadre blanc i un de negre?
Amb fitxes de dominó podem cobrir un nombre diferent de quadres blancs i negres?

Ben segur que els alumnes acabaran descobrint unes bones demostracions d'impossibilitat. Convindrà que donem temps per posar-les en comú, per discutir-les, per anar-les refinant i per a què, cada alumne, les expressi per escrit en la seva llibreta.

Continguts més rellevants que es tracten:

Raonament lògic, argumentació coherent i completa emprant idees geomètriques.
Necessitat de demostrar, també en el cas d'impossibilitat.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

De manera molt rellevant es treballa la dimensió de raonament i prova. També es treballa la dimensió de resolució de problemes, especialment la competència 3

(Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses), i la competència 10 de la dimensió de comunicació i representació (Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres).

Comentaris i referències:

Fem poques demostracions d'impossibilitat a secundària i és interessant fer observar als alumnes que, en matemàtiques, les demostracions d'impossibilitat són tan rellevants com les d'existència i sovint més difícils.

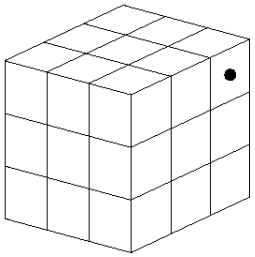
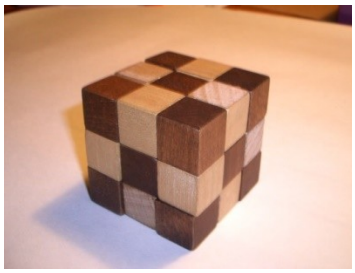
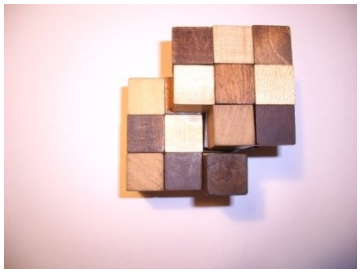
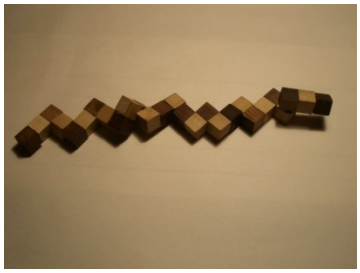
Observis que, en aquesta activitat, hi ha una fase d'**experimentació** amb material, una fase de **descoberta** de la impossibilitat i de la seva argumentació i una fase de **conceptuació**, de concreció del que hem descobert i d'exposició en una posada en comú i, per escrit, al quadern.

És interessant observar com el simple fet que els quadrats estiguin pintats de blanc i negre obre als alumnes un camí molt potent de raonament. En aquest sentit i en el fet que també es tracta d'una demostració d'impossibilitat (però en dimensió 3) aquesta activitat està molt relacionada amb la proposta que porta per títol *El camí del tèrmit*.

Proposta d'activitat

Títol: El camí del tèrmit

Imatges:

Agrupament:

El professor plantejarà un problema a la classe per tal que sigui resolt en grups de 3 o 4 alumnes. Es pretén que els grups discuteixin el problema, hi vagin entrant i apuntin solucions. Un cop fet aquest procés el docent els lliurarà un material manipulable que potser ajudarà a generar estratègies de solució.

Material:

Ens caldrà disposar de fulls amb l'enunciat del problema i d'un cub format per 27 cubets (3x3x3) acolorits en blanc i negre de manera que dos cubets amb un costat comú sempre tinguin diferent color i que es pugui desmuntar formant una tira de cubets units per una goma i amb colors alternats tal com mostren les imatges. Es tracta d'un conegut trencaclosques que planteja el repte de passar de la tira al cub i que, en aquesta activitat, emprarem per facilitar la descoberta d'un raonament que conduirà a la solució.

Descripció:

L'activitat consisteix a resoldre el següent problema que va ser plantejat per APaMMs (Associació de Professors i Mestres de Matemàtiques) en el Fem Matemàtiques del 2007 (2n d'ESO):

> *Un tèrmit entra en un gran cub de fusta format per 27 cubets més petits com en la figura superior esquerra de l'apartat d'imatges.*
>
> *Té molta gana i vol anar avançant sense sortir per res del cub gran. Ho fa marxant sempre paral·lelament a una aresta, mai no es mou en diagonal. El que vol és entrar pel punt marcat en el dibuix, avançar per tots els 26 cubs exteriors i acabar en el cubet central. Però ho vol fer sense passar dos cops per cap cubet. Ho podrà fer?*

Es repartirà un full amb l'enunciat del problema i el dibuix a què es fa referència. El treball dels grups d'alumnes passarà per una primera fase d'entrar en la situació que planteja el problema. A partir d'aquí començarà una fase d'exploració en la qual s'aniran suggerint possibles camins. Aviat sorgirà un tema molt interessant: com podem expressar, codificar, un camí? Alguns grups potser començaran a treballar amb un sistema de referència cartesià en dimensió 3 i coordenades enteres en els tres eixos. Això sol ja és un pas important!

Amb aquesta codificació o amb alguna altra s'aniran plantejant seqüències de cubets que expressin el camí que va fent el tèrmit tot començant pel cubet assenyalat i intentant acabar en el centre. En aquest treball es posaran de manifest dues dificultats: la d'expressar aquests camins i la d'imaginar-se l'itinerari que va seguint el tèrmit dins del cub evitant passar per cubets on ja s'hagi passat. Després d'uns quants passos això es manifestarà com força complex.

Observis que, en aquest tipus de treball, els grups estan emprant una estratègia de resolució força casuística basada en la construcció efectiva d'itineraris, sense una sistemàtica que permeti ordenar els passos i pressuposant l'existència del camí cercat. A poc a poc s'anirà posant de manifest la feblesa d'aquesta estratègia i anirà perfilant-se la necessitat d'enfocaments alternatius.

En aquest moment és quan convé que el docent doni als grups el cub format per cubets blancs i negres (vegeu les tres fotografies de l'apartat d'imatges). Si tan sols es disposa d'un cub, es pot mostrar conjuntament a tots els grups. Convé prendre's temps (i ajudar amb comentaris) per veure l'estructura del cub: hi ha 27 cubets, blancs i negres alternats, el tèrmit comença pel cubet d'un dels vèrtexs exteriors (que és negre), es pot preguntar de quin color serà el cubet central i es pot comprovar (serà d'un color diferent que el dels cubets dels centres de les cares, per tant serà blanc)... Un cop s'hagi comprès bé l'estructura del cub es pot desfer obtenint una tira de cubets amb colors alternats. De mica en mica els grups aniran descobrint diverses coses:

- El tèrmit comença per un cubet negre (vèrtex).

- Sempre salta d'un cubet negre a un cubet blanc o d'un cubet blanc a un cubet negre.
- Passa pels 27 cubets.
- Vol acabar en un cubet blanc (centre).

A partir d'aquí es desencadena el tram final (i més elegant) del raonament! Convé que descobreixin (potser pot caldrà algun ajut però molt lleu) que, si numerem els cubets de l'itinerari, tindrem que el cubet número 1 serà negre, el número 2 serà blanc, el número 3 serà negre, el número 4 serà blanc, el número 5 serà negre i així successivament. De quin color serà necessàriament el cubet que fa 27? Fàcilment els alumnes deduiran que ha de ser negre (tots els cubets que corresponen a un nombre senar són negres!). Per tant mai podrà ser el del centre que és blanc i la resposta al problema plantejat és que el tèrmit no ho podrà fer, que el camí no existeix.

Probablement la majoria dels grups podran arribar a aquesta conclusió a partir del raonament visual aportat per l'alternança de colors. Serà important que els alumnes deixin constància en els seus quaderns de l'estratègia seguida tot expressant l'argumentació d'impossibilitat. Això sol costar però és una manera de consolidar la descoberta recollint el fruit de l'esforç realitzat. El redactat, primer, es pot fer en grup (obligant així a contrastar opinions) i, després, es poden llegir alguns dels escrits per tal d'anar ajustant l'explicació del fil argumental.

Observis que s'ha partit d'estratègies constructives sense massa sistemàtica i, gràcies a un objecte material, s'ha arribat a un raonament de tipus global que ens ha portat a una elegant demostració d'inexistència.

Continguts més rellevants que es tracten:

Raonament lògic, argumentació coherent i completa emprant idees geomètriques. Necessitat de demostrar, també en el cas d'impossibilitat. Cossos a l'espai. Percepció d'elements de figures tridimensionals.

Dimensions i competències que es poden treballar especialment:

Es treballa la dimensió de resolució de problemes, especialment la competència 3 (Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses) i, de manera molt rellevant, les dues competències de la dimensió de raonament i prova. És interesant observar com la representació del cub de diverses maneres (amb un canvi aparentment tan simple com que tingui els cubets acolorits o no) és clau per generar una estratègia eficient de resolució del problema. Es tracta d'un exemple molt clar per il·lustrar la competència 9 de la dimensió de comunicació i representació (Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic).

Comentaris i referències:

Observis com un objecte material ens ajuda en la resolució d'un problema que, en principi, no és gens simple. El maneig del cub 3x3x3 pintat de blanc i negre contribueix a generar un raonament potent, elegant i senzill d'impossibilitat. Aquest tipus de raonaments són escassos en l'ensenyament secundari i no hauríem de perdre oportunitats per portar-ne a classe.

Aquesta activitat és semblant a una altra en dimensió dos sobre *escacs i dominó* (que també es descriu en una proposta d'activitat), tant pel fet que planteja un raonament geomètric d'impossibilitat com per què el color alternatiu dels quadrats també ajuda a la resolució.

A vegades sembla que els materials manipulables estiguin molt allunyats del raonament abstracte. Aquest és un bon exemple de què això no és veritat. Precisament un material és el desencadenant d'una reflexió lògica gens evident d'entrada.

Observis que el desenvolupament de l'activitat segueix una mica la seqüència: **experimentació** (temptejar camins, explorar el cub amb colors), **descoberta** (l'itinerari no és possible!) i **conceptuació** (concretem i expressem el que hem observat).

Com s'ha indicat, aquest problema va ser plantejat per APaMMs (Associació de Professors i Mestres de Matemàtiques) en el Fem Matemàtiques del 2007 (2n d'ESO).